

## FUNKCIJSKA ZAPOREDJA IN FUNKCIJSKE VRSTE

1. Zaporedje funkcij  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  je na intervalu  $[0, \pi]$  podano s predpisom

$$f_n(x) = \frac{\sin(n-x)}{n}.$$

Določi limito  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Ali je konvergenca enakomerna?

2. Zaporedje funkcij  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  je na intervalu  $[0, \pi]$  podano s predpisom

$$f_n(x) = e^{-nx} \cos(nx).$$

Določi  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Ali je konvergenca enakomerna?

3. Zaporedje funkcij  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  je na intervalu  $[0, \pi]$  podano s predpisom

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & : x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2 - nx & : x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & : x \in (\frac{2}{n}, \pi] \end{cases}$$

4. Funkcijsko zaporedje  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  je na  $(0, \infty)$  podano s predpisom

$$f_n(x) = \frac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}}.$$

(a) Izračunaj limitno funkcijo.

(b) Ali je konvergenca enakomerna na  $(0, 1)$ ?

(c) Ali je konvergenca enakomerna na  $[1, \infty)$ ? Oba odgovora natančno utemelji! Nasvet: skiciraj graf funkcije  $f_n$ .

5. Naj bo za vsak  $n \in \mathbb{N}$  definirana funkcija  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

(a) Poišči  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ .

(b) Ali zaporedje k limitni funkciji konvergira enakomerno?

6. Poišči območje konvergence naslednjih vrst.

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \sin x}$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n + \frac{1}{2^n x^n})$

7. Poišči območje konvergence naslednjih vrst in poišči kakšno območje enakomerne konvergence.

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$

(c)  $\sum_{n=-1}^{\infty} x^n$

8. Ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

na intervalu  $[0, 1]$  enakomerno konvergentna?

9. Ali vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$$

konvergira enakomerno?

10. Podani sta vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n} \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Kje funkcijski vrsti konvergirata? Ali konvergirata enakomerno?

11. Naj bo  $a \in \mathbb{R}$ . Podana je funkcijska vrsta

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n-1)!} \cos(nx).$$

(a) Določi konvergenčno območje  $\mathcal{D}$  funkcijske vrste  $f$ .

(b) Dokaži, da je konvergenca funkcijske vrste  $f$  na  $\mathcal{D}$  enakomerna.

(c) Izračunaj

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

Vse korake dobro utemelji!

12. Podana je funkcijska vrsta

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2-1}.$$

(a) Določi konvergenčno območje  $\mathcal{D}$  zgornje vrste.

(b) Ali je konvergenca enakomerna na  $\mathcal{D}$ ? Odgovor utemelji!

(c) Ali je funkcijska vrsta v notranjosti množice  $\mathcal{D}$  odvedljiva funkcija? Odgovor utemelji!