

TAYLORJEVA IN FOURIEROVA VRSTA

1. Seštej naslednji vrsti, kjer konvergirata.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n+1}$

2. Izračunaj konvergenčni polmer naslednjih potenčnih vrst.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{n} x^n$.

3. Razvij naslednje funkcije v Taylorjevo vrsto okoli točke $x = 0$.

(a) $f(x) = a^{2x}$, $a > 0$

(b) $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1+2x)}$

(c) $f(x) = \cos(x + a)$

(d) $f(x) = \sin^2 x$

(e) $f(x) = \ln(1 + x - 2x^2)$

(f) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

4. Naslednji funkciji razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke $x = a$.

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$

(b) $f(x) = e^x$, $a = 2$

5. Razvij funkcijo $f(x) = \arcsin x$ v Taylorjevo vrsto okoli točke $x = 0$.

6. Izračunaj naslednji limiti s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto.

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$$

7. Izračunaj

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

na štiri decimalke natančno.

8. Funkciji $f(x) = x$ in $g(x) = x^2$ razvij v kosinusni vrsti na intervalu $[0, \pi]$. Dokaži enakost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}.$$

Kaj dobimo v primeru $x = 0$?

9. Na intervalu $[-\pi, \pi]$ razvij funkcijo $f(x) = |x|$ v Fourierovo vrsto.
10. Funkcijo $f(x) = x(\pi - x)$ na intervalu $[0, \pi]$ v sinusno vrsto. Izračunaj

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots$$