

## Dvanajsta domača naloga

1. Pokaži, da je funkcija  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$  dobro definirana na  $[0, 1]$  in poenostavi njen zapis. Ali dana vrsta konvergira enakomerno na  $[0, 1]$ ?
2. Pokaži, da vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{x^2+n}$  konvergira pogojno za vsak  $x \in \mathbb{R}$  in da konvergira enakomerno na  $\mathbb{R}$ .
3. Določi konvergenčno območje spodnjih potenčnih vrst:
  - (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$ ,
  - (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^{n!}$ ,
  - (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1}n^n}$ ,
  - (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n(n+2)}}{(n+2)^{n^2}} x^{3n}$ ,
  - (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \ln n} (2x+1)^n$ .
4. Določi konvergenčno območje potenčne vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n} (x+4)^n$  in jo seštej.
5. Pokaži, da vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$  konvergira enakomerno in absolutno na  $\mathbb{R}$  in izračunaj vsoto vrste.
6.
  - (a) Določi Taylorjevo vrsto za  $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$  okrog  $a = 0$ , ugotovi, kje dobljena vrsta konvergira in izračunaj  $f^{(n)}(0)$ .
  - (b) Določi Taylorjevo vrsto za  $f(x) = xe^{x+2}$  okrog  $a = -1$ , ugotovi, kje dobljena vrsta konvergira in izračunaj  $f^{(2008)}(-1)$ .
7. Razvij naslednje funkcije v Taylorjevo vrsto okrog točke  $x = a$  in določi konvergenčno območje:
  - (a)  $5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 3$ ,  $a = -1$ ,
  - (b)  $\frac{x}{x-2}$ ,  $a = 5$ ,
  - (c)  $\frac{1}{x^2-5x+6}$ ,  $a = 1$ ,
  - (d)  $\frac{1}{x^7}$ ,  $a = 1$ ,
  - (e)  $\cos(x)$ ,  $a = \frac{\pi}{4}$ ,
  - (f)  $\cos^2(x) \sin(x)$ ,  $a = 0$ ,
  - (g)  $(1+4x) \ln(1+x)$ ,  $a = 0$ .