Trinajsta domača naloga

1. Pokaži, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+3)!}$ konvergira in izračunaj njeno vsoto.

2. S pomočjo Taylorjevega razvoja izračunaj naslednje limite:

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos(x)}$,

   (b) $\lim_{x\to\infty} \left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{x^3}{1+\frac{1}{x}} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$,

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{a\sin(x) - \sin(ax)}{x^2 \sin(x)}$.

3. (a) Oceni napako, ki jo narediš pri oceni $e \doteq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$.

   (b) Koliko členov Taylorjevega razvoja $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$ je potrebno vzeti, da izračunaš $\sin 15^\circ$ na 0.0001 natančno.

   (c) Za katere x je napaka pri oceni $\sin(x) \doteq x$ manjša od 0.001.

4. Razvij naslednje funkcije v Taylorjevo vrsto okrog a in določi območje konvergence:

   (a) $f(x) = \int_0^x \frac{sin(t)}{t}\, dt$, $a = 0$,

   (b) $g(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$, $a = 0$,

   (c) $h(x) = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t-1}\, dt$, $a = 1$.

5. Izračunaj naslednje integrale z natančnostjo N:

   (a) $\int_0^{1/4} \sqrt{1+x^3}\, dx$, $N = 0.0001$,

   (b) $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$, $N = 0.001$,

   (c) $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos(x)\, dx$, $N = 0.0001$.

6. Določi Fourierovo vrsto naslednjih funkcij na intervalu $(-\pi, \pi)$:

   (a) $f(x) = |x|$,

   (b) $g(x) = x^2$,

   (c) $h(x) = \begin{cases} x-1, & -\pi < x \le 0 \\ 2x, & 0 < x < \pi \end{cases}$