

1. IZPIT IZ ANALIZE III

1. februar 2013

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga (25)

Naj bo $(M, d) = (\mathcal{C}([1, 3/2]), d_\infty)$ dan metrični prostor in naj bo

$$A(f)(x) = 2 + \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt, \quad f \in M$$

preslikava. Prepričaj se, da (M, d) in A ustrezajo predpostavkam izreka o fiksni točki. Fiksno točko tudi poišči.

2. naloga (25)

Določi konstante a , za katere je integral

$$I(a) = \int_1^\infty \frac{(x-1)^a}{x^2} dx$$

konvergenten. Prevedi ga na funkcijo beta. Pokaži, da je integral soda funkcija parametra a . Izračunaj $I(a)$ za $a = 0, \pm 1/2$.

3. naloga (25)

S prevedbo na kompleksen integral po enotski krožnici izračunaj integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\sqrt{5} + 2\cos\varphi}.$$

4. naloga (25)

Reši diferencialno enačbo

$$y'' + a^2 y = f(x), \quad a > 0$$

pri začetnih pogojih $y(0) = 0, y'(0) = 0$ za $f(x) = \sin ax$ in $f(x) = x$.