

1. KOLOKVIJ IZ ANALIZE III

2. december 2013

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

**1. naloga**

Naj bo  $f_n(x) = n(1-x)x^n, x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$ , zaporedje zveznih funkcij. (a)(5) S pomočjo limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n + n \ln x$  za  $x \in (0, 1)$  pokaži, da  $f_n(x)$  po točkah konvergira k 0,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1-x)x^n = 0, \quad x \in [0, 1].$$

(b)(10) Ali zaporedje funkcij  $f_n(x)$  konvergira k 0 v metriki  $d_\infty$  na  $\mathcal{C}[0, 1]$ ? (c)(10) Ali zaporedje funkcij  $f_n(x)$  konvergira k 0 v metriki  $d_2$  na  $\mathcal{C}[0, 1]$ ? (d) (10) Dodatna naloga. Ali zaporedje funkcij  $f_n(x)$  konvergira k 0 v metriki  $d_p$  za  $p = 1/2, 1$  na  $\mathcal{C}[0, 1]$ ? ( $d_p(f, g) = (\int_a^b |f - g|^p)^{1/p}$  na  $\mathcal{C}[a, b]$ ).

**2. naloga**

(25) Poišči rešitev enačbe  $e^x = -x$  na 3 decimalke natančno in dokaži, da je ena sama. Najprej pokaži, da rešitev leži na intervalu  $(-\infty, -0.56]$ .

**3. naloga**

(25) Določi težišče homogenega stožca, ki ima polmer osnovne ploskve 5 in višino 10.

**4. naloga**

(25) Izračunaj prostornino telesa  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq x$ , ki leži v zgornjem polprostoru.