

Prvi kolokvij iz Analize 3, Finančna matematika
21. november 2008

1. Z M označimo množico zveznih funkcij na intervalu $I = [0, 1]$, ki zadoščajo pogoju $f(1/2) = 2$ ter

$$\sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{\sqrt{|x - y|}} ; x, y \in I, x \neq y \right\} < \infty .$$

Za $f, g \in M$ definiramo

$$d(f, g) = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y) - g(x) + g(y)|}{\sqrt{|x - y|}} ; x, y \in I, x \neq y \right\} .$$

Dokaži, da ta predpis določa metriko na M .

2. Naj bo (M, d) metrični prostor in $Z \subset M$. Definiramo funkcijo $f(x) = d(x, Z)$, torej $f(x) = \inf\{d(x, z) ; z \in Z\}$.
- (a) Dokaži, da za poljubna $x, y \in M$ velja $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$.
 - (b) Dokaži, da je f zvezna.
 - (c) V posebnem primeru, ko $(M, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, definiramo, za $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = d(x, [1/n, 1])$. Ali je zaporedje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno v prostoru zveznih funkcij na \mathbb{R} , opremljenem z d_∞ metriko?

3. Za $a \geq 1$ izračunaj

$$F(a) = \int_0^1 \frac{x - 1}{\log x} dx .$$

4. Izračunaj $\lim_{a \rightarrow 0} I'(a)$, kjer

$$I(a) = \int_0^\pi \frac{\sin(ax^2)}{x} dx .$$

Odgovore dobro utemelji.