

FINANČNA MATEMATIKA, PRVI KOLOKVIJ IZ ANALIZE 3
30.11.2009

1. NALOGA

Naj bo $M = C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ prostor neskončnokrat zvezno odvedljivih realnih funkcij na intervalu $[0, 1]$. Na njem je podana metrika

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

Dalje je podano zaporedje funkcij $f_n \in M$,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}.$$

- a. Dokaži, da je zaporedje $(f_n)_n$ konvergentno (glede na metriko d_∞).
- b. Dokaži, da preslikava $\Phi: M \rightarrow M$, podana s predpisom $\Phi(f) = f'$, ni zvezna. Uporabi karakterizacijo zveznosti z zaporedji.

2. NALOGA

Dokaži, da ima enačba

$$x + \frac{1}{2} = \log(1 + x^2)$$

na intervalu $[-1/2, 1/2]$ natanko eno rešitev.

3. NALOGA

Podano je ravninsko območje

$$D = \{(x, y) \mid 0 < x < 2, \frac{x^2}{4} \leq x \leq y^2\}.$$

- a. Skiciraj območje D ter določi njegovo notranjost in mejo. Ali je D zaprto območje?
- b. Za abstraktno funkcijo $f(x, y)$ prevedi dvojni integral $\iint_D f(x, y) dx dy$ na oba dvakratna integrala.
- c. Izračunaj integral $\iint_D (x^2 + y)^{-1/2} dx dy$.

4. NALOGA

Naj bo $\beta \in (0, \infty)$. Izračunaj prostornino telesa, ki ga omejuje ploskev

$$(x^2 + y^2)^\beta + z^2 = 1.$$

Namig: Uporabi cilindrične koordinate in integral izrazi s pomočjo znanih funkcij.