

1. KOLOKVIJ IZ ANALIZE III

26. november 2012

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga

(25) Za $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pišimo $z = re^{i\phi}$ ter $w = se^{i\psi}$, kjer so $r, s > 0$ in $\phi, \psi \in [0, 2\pi)$. Definirajmo

$$d(z, w) = \max \left\{ |r - s|, |e^{i\phi} - e^{i\psi}| \right\}.$$

Dokaži, da d določa metriko na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, in skiciraj krogli $K(i, 1)$ ter $K(10, 7)$.

2. naloga

(25) Naj bo $(M, d) = (\mathcal{C}([0, 1/2]), d_\infty)$ dan metrični prostor in naj bo

$$A(f)(x) = 1 + \int_0^x f(t) dt, \quad f \in M$$

preslikava. Prepričaj se, da (M, d) in A ustrezajo predpostavkam izreka o fiksni točki. Fiksno točko tudi poišči.

3. naloga

(25) Z odvajanjem integrala

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\log(1 + ax)}{1 + x^2} dx$$

izračunaj integral

$$\int_0^1 \frac{\log(1 + x) dx}{1 + x^2}.$$

4. naloga

(25) Izračunaj volumen območja, omejenega s ploskvama $z = x^2 + y^2$ in $z = 2(x^2 + y^2 + 1)^{-1}$.