Število točk:	
1	
2	
3	
4	
Σ	

Analiza 3, drugi kolokvij

FINANČNA MATEMATIKA

14.1.2010

Čas reševanja je 90 minut.

Ime in priimek

Vpisna številka

1. NALOGA (25 točk)

Prepričaj se, da predpis $\vec{r}(t) = \left(\operatorname{arctg}(t), \log(1+t^2), \sqrt{3}\operatorname{arctg}(t)\right)$ podaja regularno parametrizacijo gladke krivulje in izračunaj enačbo pritisnjene ravnine pri $t = 1$.

Preslikava $\vec{r}(t)$ je zvezno odvedljiva po komponentah (poljubno mnogokrat),

poleg tega je $\|\dot{\vec{r}}(t)\| = \| \underbrace{\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, \frac{\sqrt{3}}{1+t^2}\right)}_{\dot{r}(t)} \| = \frac{1}{1+t^2}\sqrt{1+4t^2+3} =$

$= \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} \neq 0$ povsod.

Torej je $\vec{r}$ res regularna parametrizacija gladke krivulje.

Izračunajmo še $\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}(1, 2t, \sqrt{3}) + \frac{1}{1+t^2}(0, 2, 0)$

Torej $\dot{\vec{r}}(1) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ in $\ddot{\vec{r}}(1) = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, zato

je normala pritisnjene ravnine pri $t=1$ vzporedna vektorju

$\dot{\vec{r}}(1) \times \ddot{\vec{r}}(1) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \ \frac{1}{2} \\ \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) -\frac{1}{2} \\ \hline \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \end{array}$$

Vzemimo kar $x\sqrt{3} - z = d$,

na ravnini pa mora biti točka $\vec{r}(1) = \left(\frac{\pi}{4}, \log(2), \frac{\pi\sqrt{3}}{4}\right)$,

torej $d = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{4} = 0$. Enačba ravnine je $x\sqrt{3} - z = 0$.

2. NALOGA **(25 točk)**

Podana sta ravninsko vektorsko polje

$$\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

in ravninska krivulja $K = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 = 1\}$.

(a) Izračunaj integral $\int_K \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$ (K orientiraj pozitivno) po definiciji.
(b) Ali je za izračun mogoče uporabiti Greenovo formulo?

(a) $\vec r(t) = (\cos t, \sin t)$, $\dot{\vec r}(t) = (-\sin t, \cos t)$

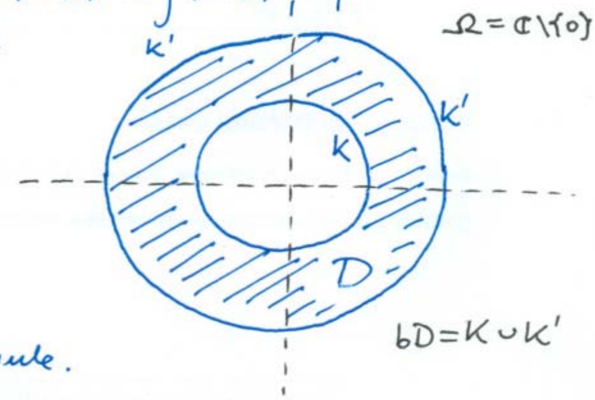
$\vec F(\vec r(t)) = (-\sin t, \cos t)$, torej

$$\int_K \vec F\cdot d\vec r = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t)\cdot(-\sin t, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} 1 = 2\pi.$$

(b) Greenovo formulo bi lahko uporabili, če bi bilo polje $\vec F$ definirano na nekem (kompaktnem) ravninskem območju z robom K.

K je rob kompaktnega enotskega diska, a polje $\vec F$ ima v izhodišču singularnost. Torej Greenove formule ni mogoče kar tako uporabiti.

Ker velja $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$,
z Greenovo formulo lahko le enačimo $\int_K \vec F\cdot d\vec r = \int_{K'} \vec F\cdot d\vec r$, kjer $\vec F$ gledamo kot gladko vektorsko polje, definirano na neki okolici kolobarja, katerega rob tvorita krožnici K in K'.



A izračunati $\int_{K'} \vec F\cdot d\vec r$ je enako kot izračunati $\int_K \vec F\cdot d\vec r$, torej za izračun ni mogoče (smiselno) uporabiti Greenove formule.

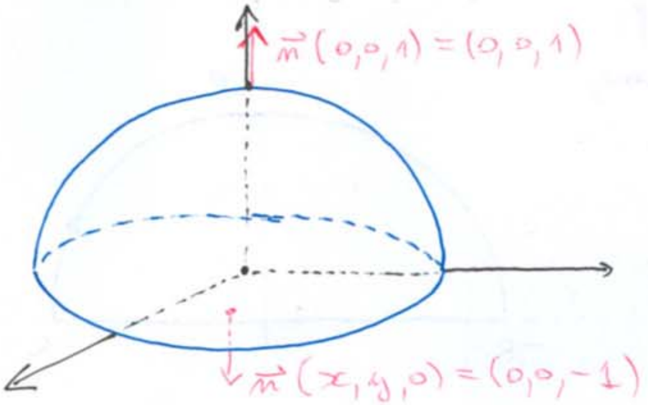
3. NALOGA **(25 točk)**

Zgornja (zaprta) enotska hemisfera $S_+ = \left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=1,\ z \geqslant 0\right\}$ je orientirana tako, da je normalni vektor v točki $(0,0,1)$ enak $(0,0,1)$. Izračunaj integral vektorskega polja

$$\vec{F}(x,y,z) = (5x^3 + 12xy^2, y^3 - e^y\cos z, e^{x^2+y^2} + e^y \sin z)$$

po ploskvi S_+.

Nasvet: Izračunaj integral polja po enotskem krogu v ravnini $z=0$. Uporabi Gaußov izrek.



Naj bo $K = \{(x,y,0)\,|\,x^2+y^2 \leq 1\}$ enotski krog v ravnini $z=0$. Glede na polkroglo je na K navzven usmerjena normala podana z $\vec{n}(x,y,0) = (0,0,-1)$.

Velja $\vec{F}(x,y,0) = (\dots,\dots, e^{x^2+y^2})$ in

$\vec{F}(x,y,0)\cdot(0,0,-1) = -e^{x^2+y^2}$.

Zato
$$\int_K \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\substack{(x,y)\\ x^2+y^2\leq 1}} \left(-e^{x^2+y^2}\right) dx\,dy = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 e^{r^2} r\,dr =$$
$$= -\pi \int_0^1 e^u\,du = \pi(1-e)$$

Po drugi strani je
$$\iint_{S_+} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_K \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\substack{\text{rob}\\ \text{polkrogle}}} \vec{F}\cdot d\vec{S} \overset{\boxed{\text{Gaußov izrek}}}{=} \iiint_{\text{polkrogla}} (\operatorname{div}\vec{F})\,dx\,dy\,dz$$

Velja $\operatorname{div}\vec{F} = 15x^2 + 12y^2 + 3y^2 - e^y\cos z + e^y \cos z = 15(x^2+y^2)$

Vpeljimo krogelne koordinate $x = \rho\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\varphi\cos\vartheta$, $z = \rho\sin\vartheta$

Tedaj
$$\iiint_{\text{polkrogla}} 15(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} d\vartheta \int_{\rho=0}^{1} 15\rho^2\cos^2\vartheta\cdot\rho^2\cos\vartheta\,d\rho$$
$$= 15\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{5}\cdot\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta = 6\pi\int_0^1(1-u^2)\,du$$
$$= 6\pi\left(1-\frac{1}{3}\right) = 4\pi.$$

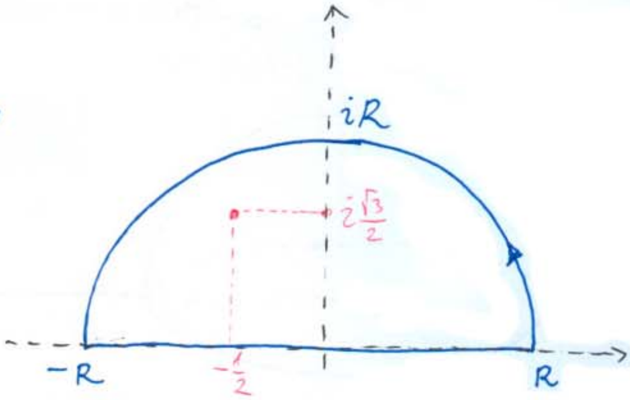
$$\Rightarrow \iint_{S_+}\vec{F}\cdot d\vec{S} = 4\pi + \pi(e-1) = \pi(3+e).$$

4. NALOGA **(25 točk)**

Izračunaj vrednost izlimitiranega integrala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{1+x+x^2}\, dx\,.$$

Nasvet: Pomagaj si s kompleksno funkcijo $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^2+z+1}$.



Uvodoma določimo singularnosti funkcije f:
$z^2+z+1=0 \iff z=\frac{-1\pm i\sqrt3}{2}$. Pripomnimo, da singularnosti ne ležita na realni osi.
Naj bo C_R (pozitivno orientiran) rob polkroga polmera R kot na desni skici, kjer je $R > \left|\frac{-1\pm i\sqrt3}{2}\right| = 1$.

Krivulja C_R obkroži eno singularnost funkcije f, namreč $-\frac12 + i\frac{\sqrt3}{2}$ (oziroma v notranjosti polkroga je ena singularnost funkcije f, zato po Cauchyjevi formuli velja

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{C_R} \frac{\frac{e^{2zi}}{z-(-1/2-i\sqrt3/2)}}{z-(-1/2+i\sqrt3/2)}\,dz = 2\pi i\cdot \frac{e^{2(-\frac12+i\frac{\sqrt3}{2})i}}{(-\frac12+i\frac{\sqrt3}{2})-(-\frac12-i\frac{\sqrt3}{2})} =$$

$$= 2\pi i \,\frac{e^{-i}e^{-\sqrt3}}{i\sqrt3} = \frac{2\pi}{\sqrt3\, e^{\sqrt3}}(\cos 1 - i\sin 1)$$

Po drugi strani je krivulja C_R sklop daljice s parametrizacijo
$\gamma_1(x)=x$, $\gamma_1'(x)=1$, $x\in[-R,R]$; $\gamma_2(\varphi)=Re^{i\varphi}$, $\gamma_2'(\varphi)=Rie^{i\varphi}$, $\varphi\in[0,\pi]$, torej velja

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = I_R+J_R\,, \quad \text{kjer } I_R = \int_{-R}^{R} \frac{e^{2xi}\,dx}{1+x+x^2} = \int_{-R}^{R}\frac{\cos(2x)\,dx}{1+x+x^2} + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin(2x)\,dx}{1+x+x^2} \quad \text{in}$$

$$J_R = \int_0^{\pi} \frac{e^{2iRe^{i\varphi}}\, Rie^{i\varphi}}{R^2e^{2i\varphi}+Re^{i\varphi}+1}\,d\varphi = Ri\int_0^{\pi} \frac{e^{-2R\sin\varphi}\, e^{i(2R\cos\varphi+\varphi)}}{R^2e^{2i\varphi}+Re^{i\varphi}+1}\,d\varphi$$

Ocenimo $|J_R| \le R\cdot\int_0^{\pi} \frac{1}{R^2-R-1}\,d\varphi = \frac{\pi R}{R^2-R-1}$ $\quad \left(R > \frac{1+\sqrt5}{2}\right)$

To pomeni, da obstaja $\lim\limits_{R\to\infty} J_R$ in je enaka 0.

Ker je $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = \frac{2\pi}{\sqrt3\, e^{\sqrt3}}(\cos1 - i\sin1)$, velja

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos(2x)}{1+x+x^2}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt3\, e^{\sqrt3}}\cos 1 \quad \text{in} \quad \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin(2x)}{1+x+x^2}\,dx = -\frac{2\pi\sin1}{\sqrt3\, e^{\sqrt3}}\,.$$

Ker je $|\cos(2x)|\le 1$ in je $1+x+x^2$ polinom stopnje 2 (brez realnih ničel), je integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{1+x+x^2}\,dx$ konvergenten in zato enak $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{\cos(2x)}{1+x+x^2}\,dx$.