2. KOLOKVIJ IZ ANALIZE III

16. 1. 2012

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga

(25) Naj bosta $\vec{F}$ ter $\vec{G}$ gladki vektorski polji na $\mathbb{R}^3$. Dokaži zvezo

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot}\vec{G}\,.$$

2. naloga

(a) (15) Izračunaj pretok polja $\vec{F}(x,y,z) = (xz, yz, (x^2+y^2)z)$ skozi rob telesa, ki je presek območij $z > 0$, $z < x^2+y^2$ in $x^2+y^2 < 1$. Rob naj bo orientiran z zunanjo normalo.
(b) (10) Izračunaj še pretoke skozi valjasti del roba, okrogli del roba in parabolični del roba posebej.

3. naloga

(25) Izračunaj integrala $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ in $\int_{\gamma_2} f(z)dz$, za

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+2z+2)^2},$$

če sta $\gamma_1 = S(1,2)$ in $\gamma_2 = S(-1,2)$ pozitivno orientirani krožnici z radijem 2 in središčema 1 in -1.

4. naloga

(a) (5) Naj bo $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots f_n = \prod_{i=1}^n f_i$. Dokaži (lahko z indukcijo), da je

$$\frac{f'}{f} = \frac{f_1'}{f_1} + \ldots + \frac{f_n'}{f_n}$$

(b) (10) Naj bo $f(z) = \prod_{j=1}^n (z-a_j)^{k_j}$, kjer so k_j cela števila, a_j pa kompleksna števila. Naj bo $S(0,R)$ krožnica, ki obkroži točke $a_1, \ldots, a_n$. Pokaži, da je integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S(0,R)} \frac{f'(z)dz}{f(z)}$$

celo število. Uporabiš lahko točko (a), tudi če je ne znaš dokazati.
(c) (10) Izračunaj integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S(0,4)} \frac{f'(z)dz}{f(z)}$$

za $f(z) = (z^2+1)^2(z^2-1)^{-2}$.