

VAJE IZ KOMPLEKSNE ANALIZE

0.1 Reši enačbe:

$$\begin{aligned}z^3 &= 1 + i \\z^2 &= -i \\z^6 &= 1 + \sqrt{3}i \\z^5 &= 5z.\end{aligned}$$

Rešitve tudi grafično predstavi.

0.2 Nariši množice točk:

$$\begin{aligned}|\operatorname{Re} z| &\leq 1 \\|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| &= 1 \\|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| &< 1 \\|z - 1| &= 2 \\|2z - 1| &= |z + 1| \\|z + 1| &= |z - 1|.\end{aligned}$$

0.3 Naš malce prismuknjeni stric nam na samotnem otoku zapusti zaklad. V oporoki je napisal, da je s čolnom priplul na samotni otok, na katerem raste palma in kaktus. Štel je korake do palme, se zasukal v desno za 90 stopinj, naredil v tej smeri enako korakov in na koncu zapičil v pesek palico. Potem se je vrnil do čolna. Zdaj pa se je obrnil h kaktusu in štel korake od čolna do kaktusa, se zasukal v levo, naredil v tej smeri enako korakov in v pesek zapičil palico. Potem je zakopal zaklad na sredini med obema palicama, palice pa je odstranil. Pozabil pa je povedati, kje je pustil čoln. Ali znaš najti zaklad? Nasvet. Uporabi kompleksna števila. Čolnu priredi kompleksno število x , palmi y , kaktusu pa z in z njimi izrazi točko na sredini med palicama.

0.4 Določi $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, z)$, če je $u(x, y) = xy$.

0.5 Določi $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, z)$, če je $u(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$.

0.6 Izračunaj integral

$$\int_{|z-(1+i)|=2} \frac{z + 2dz}{(z - 3)z^2}.$$

0.7 Izračunaj integral

$$\int_{|z|=2} \frac{zdz}{(z - 3)(z^2 + 1)}.$$

0.8 Izračunaj integral

$$\int_{|z-(1+i)|=5} \frac{(z + 2)dz}{(z + 3)z^2}.$$

0.9 Izračunaj integral

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin^6 z dz}{(z - \pi/6)^3}. (R : -i\pi)$$

0.10 Izračunaj integral

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{iz} dz}{z^3}. (R : 21\pi i/16)$$

0.11 Izračunaj integral

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{zt} dz}{(z^2 + 1)^2}, t > 0. (R : 4\pi i t \cos t)$$

0.12 Izračunaj integral

$$\int_{|z|=4} \frac{f'(z) dz}{f(z)}, f(z) = \frac{(z^2 + 1)^2}{(z^2 + 2z + 2)^2}. (R : -4\pi i)$$

0.13 Razvij funkcijo

$$f(z) = \frac{z + 2}{(z - 3)z^2}$$

v Laurentovo vrsto okoli 0 in izračunaj $\text{Res}(f, 0)$.

0.14 Razvij funkcijo

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 2z^2}$$

v Laurentovo vrsto okoli 0 in izračunaj $\text{Res}(f, 0)$.

0.15 Razvij funkcijo

$$f(z) = \frac{z + 2}{(z + 3)z^2}$$

v Laurentovo vrsto okoli 0 in izračunaj $\text{Res}(f, 0)$.

0.16 Razvij funkcijo

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 - 4)(z^2 - 1)}$$

v Laurentovo vrsto, ki konvergira na $1 < |z| < 2$.

0.17 Razvij funkcijo

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 4)(z^2 - 1)}$$

v Laurentovo vrsto, ki konvergira na (a) $1 < |z| < 2$, (b) $|z| > 2$.

0.18 Zapiši holomorfnu preslikavo, ki predstavlja rotacijo za kot $\pi/4$ okoli točke $z_0 = 2i$ v pozitivni smeri. Kam se preslika točka i ?

0.19 Dana je preslikava

$$f(z) = \frac{z + i}{z - i}.$$

Ugotovi, kam se slikajo točke $i, -i$ in 0 . Kam se preslika imaginarna os? Kam se preslika $\{z, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$?

0.20 Poišči holomorfnu funkcijo $f = u + iv$, če je

$$(1) \quad u = x^2 - y^2 + 5x + y - y(x^2 + y^2)^{-1}, \quad (\mathbb{R}: z^2 + (5 - i)z)$$

$$(2) \quad v = (x + y)/(x^2 + y^2), \quad (\mathbb{R}: (-1 + i)/z)$$

$$(3) \quad u = x(1 + x^2 + y^2)/(1 + 2(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)^2), \quad f(0) = 0, \quad (\mathbb{R}: \operatorname{ctg} z).$$

0.21 Izračunaj naslednje realne integrale:

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x}, \quad R: 2\pi(a^2 - 1)^{1/2},$$

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos x)dx}{1 + \cos^2 x}, \quad R: \pi\sqrt{2},$$

$$(3) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{(1 - 2a \cos x + a^2)(1 - 2b \cos x + b^2)}, \quad a \neq b, ab \neq 1, \quad R: \pi/(2 - 2ab), |a| < 1, |b| < 1. \text{ Ostale kombinacije izračunaj sam.}$$

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}, \quad R: -\pi/27$$

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^6}, \quad R: \pi\sqrt{2}$$

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^4 + 1)dx}{1 + x^6}, \quad R: \pi/3$$

$$(7) \quad \int_0^{\infty} \frac{x \sin x dx}{1 + x^2 + x^4}, \quad R: \pi/\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}/2} \sin(1/2).$$