1. naloga

Naj bo d metrika na nekem vektorskem prostoru V. Metrika je homogena, če velja $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ in translacijsko invariantna, če je $d(x, y) = d(x - z, y - z)$. Dokaži, da veljata naslednji trditvi. (a) Če je metrika homogena, je $K(0, r) = rK(0, 1)$ za vsak $r \geq 0$. (b) Če je metrika translacijsko invariantna, je $K(a, r) = a + K(0, r)$ za vsak $a \in V$.

2. naloga

Na množici $\mathbb{R}$ je dan predpis

$$d(x, y) = |e^x - e^y|.$$

Pokaži, da je $M = (\mathbb{R}, d)$ metrični prostor. Ali je metrika homogena in translacijsko invariantna? Nariši krogli $\bar{K}(0, 1)$ in $\bar{K}(1, 1)$. Pokaži, da je zaporedje $e_n = -n^2$ Cauchyjevo. Ali je konvergentno? Ali je prostor poln?

3. naloga

Na množici $\mathbb{R}$ je dan predpis

$$d(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}|.$$

Pokaži, da je $M = (\mathbb{R}, d)$ metrični prostor. Ali je metrika homogena in translacijsko invariantna? Nariši krogli $\bar{K}(0, 1)$ in $\bar{K}(1, 1)$. Pokaži, da je zaporedje $e_n = n^2$ Cauchyjevo. Ali je konvergentno? Ali je prostor poln?

4. naloga

Na množici $(0, 1]$ je dan predpis

$$d(x, y) = |x^{-1} - y^{-1}|.$$

Pokaži, da je $M = ((0, 1], d)$ metrični prostor. Ali je metrika homogena in translacijsko invariantna? Nariši krogli $\bar{K}(1, 1)$ in $\bar{K}(1/2, 1)$. Pokaži, da zaporedje $e_n = n^{-1}$ ni Cauchyjevo. Ali je prostor poln?

5. naloga

Na množici $[-\pi/2, \pi/2]$ je dan predpis

$$d(x, y) = |\sin(x) - \sin(y)|.$$

Pokaži, da je $M = ([-\pi/2, \pi/2], d)$ metrični prostor. Ali je metrika homogena in translacijsko invariantna? Nariši krogli $\bar{K}(0, 1)$ in $\bar{K}(\pi/4, 1)$. Pokaži, da je zaporedje $e_n = n^{-1}$ Cauchyjevo. Ali je prostor poln?

6. naloga

V množici $M = (0, \infty)$ je dan predpis

$$d(x, y) = |e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{y}}|.$$

Pokaži, da je (M, d) metrični prostor in nariši zaprto kroglo $\bar{K}(1, 1)$. Pokaži, da v tem metričnem prostoru zaporedje $x_n = n^{-1}$ ni Cauchyjevo.

7. naloga

Ali je s predpisom $d(x,y) = |x^2 - y^2|$ dana metrika na $\mathbb{R}$?

8. naloga

Poštarska ali metrojska metrika na $\mathbb{R}^2$ je dana s predpisom

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & x, y \text{ kolinearna} \\ |x| + |y| & \text{sicer.} \end{cases}$$

Oznaka $|x|$ pomeni oddaljenost x od izhodišča. Dokaži, da je s tem predpisom dana metrika na $\mathbb{R}^2$ in nariši krogle $K((1,1),1)$, $K((0,0),1)$, in $K((1,1),2)$.

9. naloga

Pokaži, da je funkcija $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, dana s predpisom

$$f(x) = -2 + \sqrt{6+4x}$$

skrčitev. Izračunaj fiksno točko.

10. naloga

Pokaži, da je funkcija

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

skrčitev na območju $[2,\infty)$ in izračunaj fiksno točko.

11. naloga

Pokaži, da je funkcija

$$f(x) = \frac{x}{3} + \frac{6}{x}$$

skrčitev na območju $[3,\infty)$ in izračunaj fiksno točko.

12. naloga

Naj bo $L = \{(x,x^2), x \in \mathbb{R}\}$. Izračunaj oddaljenost točke $(4,0)$ od množice L v metričnem prostoru $(\mathbb{R}^2, d_1)$.

13. naloga

Na množici $\mathbb{R}^2$ je dan predpis

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \log(1 + |x_1 - x_2|) + \log(1 + |y_1 - y_2|).$$

Pokaži, da je $M = (\mathbb{R}^2, d)$ metrični prostor. Ali je metrika homogena in translacijsko invariantna? Nariši zaprti krogli $\bar{K}((1,1),1)$ in $\bar{K}((0,0),1)$.

Nasvet: najprej pokaži, da za $a, b \geq 0$ velja

$$\log(1+a+b) \leq \log(1+a) + \log(1+b).$$

14. naloga

Na množici $\mathbb{R}^2$ je dan predpis

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |e^{x_1} - e^{x_2}| + |e^{-y_1} - e^{-y_2}|.$$

Pokaži, da je $M = (\mathbb{R}^2, d)$ metrični prostor. Ali je metrika homogena in translacijsko invariantna? Nariši krogli $\bar{K}((0,0),1)$ in $\bar{K}((1,0),1)$. Pokaži, da je zaporedje $e_n = (-n^2, n^2)$ Cauchyjevo. Ali je konvergentno? Ali je prostor poln?

15. naloga

V metričnem prostoru $C([0,1], d_1)$ je dano zaporedje

$$f_n(x) = x^n : [0,1] \to \mathbb{R}.$$

Pokaži, da je to zaporedje Cauchyjevo. Ali je konvergentno? Ali je prostor poln? Naj bo $L = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ in $g(x) = \sin(\pi x/2)$. Izračunaj razdaljo $d_1(g, L)$. Ali je zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo v $C([0,1], d_\infty)$?

16. naloga

Naj bo $L = \{(x^3, x^2), x \in \mathbb{R}\}$. Izračunaj oddaljenost točke $(1,0)$ od množice L v metričnih prostorih $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $(\mathbb{R}^2, d_2)$ in $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

17. naloga

Dana je preslikava $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2, y)$. Ugotovi, ali je f zvezna kot preslikava naslednjih metričnih prostorov:

1. $f : (\mathbb{R}^2, d_1) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$
2. $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$
3. $f : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \to (\mathbb{R}^2, d_1)$
4. $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}^2, d_{\text{ poštarska}})$.

18. naloga

Ali je preslikava $F : C([0,1], d_\infty) \to C([0,1], d_1)$, $F(f)(x) = f(1-x)$ zvezna? Kaj pa preslikava $G(f)(x) = (f(x))^2$?

19. naloga

Dana je funkcija $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$,

$$f(x) = -3 + (13 + 6x)^{\frac{1}{2}}.$$

Pokaži, da je skrčitev in izračunaj fiksno točko.

20. naloga

Dana je preslikava $F : C([0,1], d_\infty) \to C([0,1], d_\infty)$, $F(f)(x) = (1/3)f(1-x^2) + \sin(x)$. Pokaži, da je skrčitev.