Prvi izpit - Ana4(F)

1. a) Reši Bernoulijevo diferencialno enačbo

$$y' - \frac{2y}{x} = -x^2y^2.$$

   b) Za $a \in [0,1]$ je podana diferenčna enačba

$$y_{t+2} = 2y_{t+1} - ay_t, \quad y_0 = 0, y_1 = 1.$$

   Pokaži, da je $\lim_{t\to\infty} \frac{y_t}{t} \neq \infty$ natanko tedaj, ko je $a = 1$.

Rešitev: Uvedemo spremenljivko $z = y^-1$ in dobimo linearno enačbo

$$z' + \frac{2}{x}z = x^2.$$

Rešitev homogenega dela je $z_h = Cx^{-2}$, z variacijo konstante pa dobimo partikularno rešitev $z_p = x^3/3$. Končna rešitev je torej $y = 1/(Cx^{-2} + x^3/3)$.
Karakteristična enačba diferenčne zveze je

$$\lambda^2 - 2\lambda + a = 0.$$

Če je $a = 1$ sta ničli $\lambda_{1,2} = 1$ in je $y_t = Ct + D$. Ko upoštevamo še začetni pogoj dobimo $y_t = t$. Če je $a \in [0,1)$, sta ničli

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}.$$

Ko upoštevamo začetni pogoj, dobimo rešitev

$$y_t = \frac{1}{2\sqrt{1-a}}\left((1+\sqrt{1-a})^t - (1-\sqrt{1-a})^t\right).$$

Prvi člen izraza gre proti neskončnosti, drugi pa proti nič. Kvocient y_t/t gre proti ∞.

2. Podana je parcialna diferencialna enačba

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x, y < \pi,$$

in robni pogoj za spremenljivko x: $u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0$.

   a) S separacijo jo reši za $u(x,0) = u(x,\pi) = \cos x$.

   b) Ali ima problem enolično rešitev pri pogoju $u(x,0) = u_y(x,0)$?

Rešitev: S separacijo dobimo sistem

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \mu \in \mathbb{R}, \quad X'(0) = X'(\pi) = 0.$$

Izkaže se, da so možne rešitve $X_0 = C_0$ za $\mu = 0$ in $X_k = C_k \cos(kx)$ za $\mu = -k^2$. Splošna rešitev je torej

$$u = Ay + B + \sum_{k=0}^{\infty} \cos(kx)(D_k e^{ky} + E_k e^{-ky}).$$

Robni pogoji iz a) povedo: $A = B = D_k = E_k = 0$ za $k > 1$ in

$$C_1 = \frac{1 - e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}}, \quad D_1 = 1 - C_1.$$

Robni pogoji iz b) ne dajo enolične rešitve. Dve možni rešitvi sta na primer $u = 0$ in $u = e^y \cos x$.

3. Podan je nelinearni sistem

$$\dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2),$$

$$\dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2).$$

Pokaži, da je $(0,0)$ edina ravnovesna točka in jo klasificiraj. Uporabi polarne koordinate in poišči vse ciklične rešitve. Katere izmed njih so stabilne? Nariši fazni portret.

Rešitev: Velja $x\dot{x} - y\dot{y} = x^2 + y^2$. Če je (x, y) ravnovesna točka, je torej $x^2 + y^2 = 0$. Nadalje velja

$$DF(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = 4 \pm i,$$

zato je izhodišče izvor. V polarnih koordinatah dobimo

$$\dot{r} = r(1 - r^2)(4 - r^2), \ \dot{\varphi} = -1.$$

Imamo torej dve ciklični rešitvi $r = 1$ in $r = 2$. Ostale tokovnice imajo obliko spiral, ki krožijo v smeri urinega kazalca in se približujejo krožnici $r = 1$ ali pa se oddaljujejo od krožnice $r = 2$.

4. Poišči stacionarno točko funkcionala

$$F(y) = \int_0^{\pi} (y')^2 - y^2 - 2xy \, \mathrm{d}x.$$

pri pogojih $y(0) = 0$, $y(\pi) = \pi$ in $\int_0^\pi xy\mathrm{d}x = 0$. Ali jo je mogoče klasificirati z izrekom, ki smo ga uporabljali na vajah?

Rešitev: Definiramo $L_\lambda = (y')^2 - y^2 - 2xy + \lambda xy$. Splošna rešitev Euler-Lagrangeovega sistema

$$2y'' = -2y - 2x + \lambda x$$

je $y = A\cos x + B\sin x + (\lambda/2 - 1)x$. Iz dodatnih pogojev razberemo $A = 0$, $\lambda = 4$ in $B = -\pi^2/3$. Kar zadeva klasifikacijo so množice $M_x = \mathbb{R}^2$ sicer konveksne, a ima Hessejeva matrika H_{L_4} lastni vrednosti $\lambda = \pm 2$, kar onemogoči uporabo izreka.