

## Izpit iz Analize 3

24. junij 2009

1. Reši enačbo  $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$ ,  $x > 0$ . Kaj so singularne rešitve zanjo?
2. Naj bo funkcija  $y$  poljubna rešitev enačbe  $y'' + y' + y^3 = 0$ . Pokaži, da je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = 0.$$

Lahko dokazuješ po naslednjih korakih:

- Izračunaj  $z'$ , kjer je  $z = (y + y')^2 + y'^2 + y^4$ .
  - Pokaži, da ima  $z(x)$  limito za  $x \rightarrow \infty$ .
  - Privzemi, da je ta limita neničelna in odtod izpelji, da mora biti  $y'^2(x) + y^4(x) > \varepsilon$  za velike  $x$ .
  - Izrazi  $z(t)$  s pomočjo primernega integrala in pridi do protislovja.
3. V okolici točke 0 zapiši vse rešitve enačbe  $9x(1-x)y'' - 12y' + 4y = 0$ .
  4. Nariši ekstremalo funkcionala

$$I(y) = \int_1^3 y^2(1-y')^2 dx, \quad y(1) = y(3) = 2.$$

Odgovore dobro utemelji.