Drugi izpit - Ana4(F)

1. a) Podana je parcialna diferencialna enačba drugega reda

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = u_x - u_y.$$

Pretvori jo v kanonično obliko in poišči njeno splošno rešitev.

Rešitev: Ker je $\delta = 0$, je enačba parabolična. Za prvo novo tako vzamemo funkcijo, ki reši enačbo $t_x - t_y = 0$. Na primer $t = x + y$. Za drugo spremenljivko vzamemo funkcijo, ki je neodvisna od t, na primer $s = x$. Z njima se enačba izrazi kot

$$u_{ss} = u_s.$$

To je enačba drugega reda v s. Njena karakteristična enačba je $\lambda^2 = \lambda$. Splošna rešitev je torej enaka

$$u = F(t) + G(t)e^s$$

$$u = F(x + y) + G(x + y)e^x.$$

b) Z metodo karakteristik poišči rešitev enačbe

$$u_x + y^2 u_y = u^2, \quad \text{p.p.} \quad u(x, 1) = \frac{1}{2 + x} \text{ za } x, y > 0.$$

Ali je rešitev enolična?

Rešitev: Najprej poiščemo parametrična rešitev karakterističnega sistema

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = y^2, \quad \dot{u} = u^2$$

pri začetnem pogoju $\Gamma(s) = (s, 1, \frac{1}{2+s})$. Ta je enaka

$$x = t + s, \quad y = \frac{1}{1 - t}, \quad u = \frac{1}{2 + s - t}.$$

Eksplicitno jo lahko zapišemo kot

$$u = \frac{y}{xy + 2}.$$

Zanjo je izpolnjen transferzalnostni pogoj

$$(T) = \begin{bmatrix} a(x_0(s), y_0(s)) & a(x_0(s), y_0(s)) \\ \dot{x_0}(s) & \dot{y_0}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Torej je to edina rešitev enačbe.

2. a) Reši Bernulijevo enačbo

$$y' - \frac{y}{x} = xy^2.$$

b) Klasificiraj ravnovesne točke nelinearnega sistema

$$\dot{x} = x,$$

$$\dot{y} = x^2y^2 + y.$$

Z uporabo točke *a*) poišči prvi integral in skiciraj fazni portret.

Rešitev: Uvedemo novo spremenljivko $z = 1/y$ in dobimo:

$$z' + \frac{z}{x} = -x.$$

Rešitev enačbe je $z = C/x - x^2/3$ oziroma

$$y = \frac{3x}{D - x^3}.$$

Edina ravnovesna točka je $(0, 0)$, tam imamo izvor. Ko računamo prvi integral dobimo

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = y' = xy^2 + \frac{y}{x},$$

kar je natanko enačba iz točke *a*). Tokovnice imajo torej obliko racionalne funkcije z ničlo v $x = 0$ in s polom v $\sqrt[3]{D}$.

3. Poišči vse stacionarne točke funkcionala

$$F(y) = \int_0^\pi y'^2 \mathrm{d}x.$$

pri pogojih $y(0) = y(\pi) = 0$ in $\int_0^\pi y^2 \mathrm{d}x = 1$. Ali je v kateri izmed teh točk globalni ekstrem?

Rešitev: Definiramo $L_\lambda = y'^2 + \lambda y$ in dobimo EL enačbo

$$y'' + \lambda y = 0.$$

Kot pri separaciji spremenljivk ločimo primere ko, $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ in $\lambda < 0$. Robnim pogojem ustrezajo rešitve

$$y_0(x) = 0, \quad y_n(x) = C_n \sin(nx),$$

vendar pa rešitev y_0 ne zadošča integralskemu pogoju $\int_0^\pi y^2 \mathrm{d}x = 1$, pri y_n pa dobimo $C_n = \pm\sqrt{2/\pi}$. Nadalje velja $F(y_n) = n^2$. Torej je y_n globalni minimum, globalni maksimum pa ne obstaja.

4. a) Imejmo sistem diferenčnih enačb $x_t = Ax_{t-1}$ in sistem diferencialnih enačb $\dot{x} = Ax$ za

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix},$$

ter začetni pogoj $x_0 = x(0) = (1, a)$. Za katere $a \in \mathbb{R}$ bo veljalo $\lim_{t\to\infty} x_t = \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

b) Nihalo z maso m je pritrjeno na vzmet s koeficientom k, katere konec nihamo v odvisnosti od časa $f(t) = \cos \alpha t$. Enačba se glasi

$$m\ddot{x} + k(x - f(t)) = 0.$$

Za katere $\alpha > 0$ je gibanje nihala neomejeno?

Rešitev: Lastni vrednosti matrike A sta $\lambda_{1,2} = \pm 1/2$, lastna vektorja pa $v_1 = (1, 0)$ in $v_2 = (1, 1)$. Rešitev x_t gre vedno proti nič, saj velja $|\lambda_{1,2}| < 1$. Rešitev $x(t)$ gre proti nič, če

$$(1, a) \in E^s = \operatorname{Lin}\{(1, 1)\} \Longrightarrow a = 1.$$

Enačba v točki b) je nehomogena drugega reda in s konstantnimi koeficienti. Homogeni del ima vedno omejeno rešitev

$$x_H = C\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + D\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t).$$

Na drugin strani lahko partikularno rešitev najdemo z nastavkom

$$x_P = (A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t))t^s,$$

pri čemer je $s = 1$ če $\alpha = \sqrt{k/m}$ in $s = 0$ sicer. Če je torej $s = 1$, je gibanje neomejeno.