1. verzija;
2. naloga kasneje
spremenjena v
(homogeno) linearno

3. izpit iz Analize 3 (3. letnik PM-TM-UM)

4. september 2009

1. Poišči tisto rešitev enačbe
$$y'x^2\cos\frac{1}{x} = y\sin\frac{1}{x} - 1\,,$$
za katero velja $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$.

2. Imejmo enačbo
$$y'' + py' + qy = 0\,. \tag{1}$$
Dokaži ekvivalenco trditev:

   (a) Prostor rešitev za (1) je translacijsko invarianten.

   (b) Koeficienta p, q sta konstantna.

   Pogoj (a) pomeni, da za vsako rešitev f enačbe (1) in vsak $t \in \mathbb{R}$ funkcija $x \mapsto f(x+t)$ spet reši (1).

3. V okolici točke 0 s pomočjo Frobeniusove metode najdi vse rešitve enačbe $xy'' + 4y' - xy = 0$.

4. Naj bo A gladka funkcija, ki slika iz $\mathbb{R}$ v prostor $n \times n$ realnih matrik. Dana naj bo takšna konstanta $C > 0$, da je $\langle A(t)y, y\rangle \leqslant C$ za vsak $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\| \leqslant 1$. Privzemimo, da vektorsko polje x reši enačbo $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Dokaži, da za vsak $t \in \mathbb{R}_+$ velja $\|x(t)\| \leqslant e^{Ct}\|x(0)\|$.

   Nasvet: odvajaj funkcijo $z(t) = \|x(t)\|^2$.

Odgovore dobro utemelji.