

ANALIZA 4 (fin) - 1. kolokvij

6. 12. 2011

Ime in priimek:

Vpisna št.:

1. [20] Poišči zaporedje $(a_n)_{n \geq 0}$, ki zadošča zvezi

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 3 \cdot 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

in velja $a_0 = 1, a_1 = 2$.

2. [20] Poišči rešitev naslednje NDE

$$y''' = y^2 y',$$

ki zadošča pogojem $y(0) = 1, y'(0) = 1/\sqrt{6}, y''(0) = 1/3$.

3. [25] Naj bo $\vec{\omega} = (2, 4, 4)^T, \vec{a} = (0, -2, 1)^T$. Poišči splošno rešitev $\vec{x} = \vec{x}(t)$ vektorske NDE

$$\dot{\vec{x}} = \vec{\omega} \times \vec{x} + \vec{a}.$$

Pomoč: Izpiši dano NDE po komponentah.

4. Opazujemo populacijo šimpanzov. Vsako leto umre delež $\alpha > 0$ samcev in enako za samice. Prav tako se v vsakem letu vsak samec pari z vsako samico in delež $\beta > 0$ teh paritev se konča z rojstvom enega mladiča, ki je z verjetnostjo $\frac{1}{2}$ samec in z enako verjetnostjo samica.

(a) [5] Če $X(t)$ pomeni število samcev v letu t ter $Y(t)$ pomeni število samic v letu t , zapiši sistem NDE za $X(t), Y(t)$, ki opisuje zgoraj opisano dinamiko populacije.

(b) [15] Skiciraj fazni portret sistema NDE iz (a) pri $\alpha = \beta = 1$.

(c) [5] Na faznem portretu iz (b) (tj. pri $\alpha = \beta = 1$) označi množico točk (X_0, Y_0) z naslednjo lastnostjo: če je število samcev v letu $t = 0$ enako $X_0 \geq 0$ ter število samic $Y_0 \geq 0$, populacija izumre.

(d) [10] Reši sistem iz (a).

Pozor! Rešitev vsebuje integral, ki ga ni moč izraziti z elementarnimi funkcijami!