Analiza 4 (F) - Prvi kolokvij

Rešitve

1. a) Poišči splošno rešitev diferenčne enačbe

$$y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = 5 \cdot 3^t.$$

Rešitev: Karakteristična enačba je $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, homogeni del reši

$$y_t^H = C \cdot (-2)^t + D \cdot 3^t.$$

Partikularna rešitev je oblike $y_t^P = A \cdot t \cdot 3^t$. Ugotovimo, da $A = 1/3$.

b) Preveri, da funkcija $y = x - 1$ reši diferencialno enačbo

$$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x(x-1)} = 0.$$

Z Liouvillovim izrekom poišči še eno neodvisno rešitev.

Rešitev: Liouvillov izrek pove

$$\det \begin{vmatrix} x-1 & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} = Ce^{\ln x},$$

kar pomeni, da moramo poiskati partikularno rešitev linearne enačbe

$$y' = \frac{y}{x-1} + \frac{x}{x-1}.$$

Ta je enaka $y = (x-1)\ln(x-1) - 1$.

2. Podan je sistem diferencialnih enačb $\dot{x} = Ax$ za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi prostore E^N, E^S in E^C, ter skiciraj fazni portret v lastni bazi.
Rešitev: Lastni pari so $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$, $\lambda_3 = 1$ in

$$v_{1,2} = (0, \pm i, 1), \quad v_3 = (2, -3, 2).$$

To pomeni, da je $E^S = E^C = \emptyset$ in $E^N = \mathbb{R}^3$. Tokovnice so spirale katerih radij se z višino povečuje.

3. Utež mase $m > 0$ je pripeta na vzmet s koeficientom $k > 0$.
   a) Enačba, ki opisuje nihanje uteži, je podana z
   $$m\ddot{x} + kx = 0.$$
   Poišči rešitev, ki ustreza pogojema $x(0) = 0$ in $\dot{x}(0) = v_0$.
   b) V enačbo dodamo dušenje, ki je sorazmerno s hitrostjo gibanja
   $$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0.$$
   Pokaži, da za vsak $c > 0$ velja $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ (nihalo se ustavi).

   Rešitev: Karakteristična enačba $m\lambda^2 + k = 0$ ima dve imaginarni rešitvi, zato je splošna rešitev enačbe
   $$x(t) = C\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + D\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t).$$
   Iz začetnih pogojev ugotovimo, da je $C = 0$ in $D = \sqrt{m/k}v_0$.
   Če dodamo dušenje ima karakteristična enačba ničli
   $$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}.$$
   Nihalo se ustavi, ko je $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$. Za $c^2 - 4km \leq 0$ je to očitno, za $c^2 - 4km > 0$ pa preverimo z računom.

4. Podana je Bernoullijeva diferencialna enačba
   $$y' = -\frac{y}{x} + y^2 \ln x.$$
   a) S primerno substitucijo poišči rešitev enačbe za $y(e) = a > 0$.
   b) Z uporabo eksistenčnega izreka dokaži, da obstaja enolična rešitev tudi pri pogoju $y(e) = 0$. Poišči to rešitev!

   Rešitev: Uporabimo zamenjavo $z = 1/y$ in rešimo linearno enačbo
   $$z' = \frac{z}{x} - \ln x.$$
   Dobimo $z = Cx - x\ln^2 x/2$ in $C = \frac{1}{ae} + 1/2$ (začetni pogoj za $y = 1/z$). Ker je $f(x, y) = -\frac{y}{x} + y^2 \ln x$ zvezno odvedljiva po y na okolici $(e, 0)$, so izpolnjene predpostavke izreka. Enolična rešitev je $y = 0$.

Dodatna naloga: Poišči neavtonomen sistem diferencialnih enačb, katerega rešitvi sta funkciji $x_1(t) = (1, t^2)$ in $x_2(t) = (-t, 1+t)$, $t \geq 0$.

Rešitev: Opazimo, da je fundamentalna rešitev sistema enaka

$$Y = (x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t^2 & 1+t \end{bmatrix}.$$

Ker zadošča enačbi $\dot{Y} = AY$, lahko izrazimo

$$A = \dot{Y}Y^{-1} = \frac{1}{1+t+t^3} \begin{bmatrix} t^2 & -1 \\ 2t+t^2 & 2t^2+1 \end{bmatrix}.$$