Drugi kolokvij iz Analize 3
17. januar 2008

1. Določi funkcijo f, da bo enačba

$$2y'^2 + f(x,y)y' + y = 0$$

imela singularno rešitev. To rešitev tudi poišči.

2. Reši enačbo

$$y''y = 3y'^2 + yy'$$

ob robnih pogojih $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

3. Pokaži, da linearno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti lahko s pomočjo integrirajočega množitelja zreduciramo na linearno diferencialno enačbo prvega reda. Natančneje, ob danih $p, q \in \mathbb{R}$ najdi takšno število r (lahko je kompleksno) in takšno funkcijo $\mu = \mu(x)$, da bo veljalo

$$[\mu(y' + ry)]' = \mu(y'' + py' + qy)\,.$$

4. Imejmo *dve* diferencialni enačbi z zveznimi realnimi koeficienti p_1, q_1, p_2, q_2, in sicer

$$y'' + p_j\, y' + q_j y = 0 \tag{1}$$

za $j = 1, 2$. Privzemimo, da je $|p_1(x)| \leqslant |p_2(x)|$. Če vzamemo poljubna para rešitev enačb (??) in z W_1 ter W_2 označimo pripadajoči determinanti Wronskega, ali iz $\lim_{x\to\infty} W_1(x) = 0$ sledi $\lim_{x\to\infty} W_2(x) = 0$? (Če je odgovor nikalen, najdi kak protiprimer.)

Kaj pa, če sta p_1 in p_2 pozitivni funkciji ?

5. [bonus naloga] Naj bo funkcija $y = f(x)$ rešitev enačbe

$$4y'' + 8y' = -5\,.$$

Pokaži, da ima funkcija

$$g(x) = \frac{f(x)^2}{f(x)^4 + 1}$$

maksimum na $\mathbb{R}$.