ANALIZA 4(fin) - 2. kolokvij

20. 1. 2011

Ime in priimek:
Vpisna št.:

1. [25] Na prostoru funkcij, ki zadoščajo pogoju $y(0) = 0$, poišči vse ekstremale funkcionala

$$I[y] = \int_0^1 \left(y^2 + y'^2 + yx^2\right) \, dx.$$

2. [40] Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$. Dana je naloga za funkcijo $u = u(x, y, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u + \alpha u, \quad (x, y) \in (0,1)^2, t > 0,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = u(0, y, t) = 0, \quad x, y \in [0, 1], t > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, y, t) = 0, \quad y \in [0, 1], t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = x(2 - x)y(1 - y).$$

Reši nalogo in določi vse vrednosti realnega parametra α, pri katerih velja

$$\lim_{t \to \infty} u(x, y, t) = 0.$$

3. Opazujmo naslednji verjetnostni populacijski model: v zelo kratkem časovnem intervalu δt

   - **A**: se rodi en nov član populacije z verjenostjo $Nr\delta t$, kjer je N trenutno število osebkov v populaciji, ter
   - **B**: umre en član populacije z verjetnostjo $Ns\delta t$, kjer je N trenutno število osebkov v populaciji.

   Tu sta dogodka **A** in **B** neodvisna, r ter s pa sta različni pozitivni števili.

   (a) [5] Če s $P_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ označimo verjetnost, da ob času t populacija šteje n osebkov, dokaži, da v limiti $\delta t \to 0$ časovni razvoj sistema opiše naslednji (neskončen) sistem NDE

   $$\dot{P}_n = r(n-1)P_{n-1} + s(n+1)P_{n+1} - (s+r)nP_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   (b) [15] Prepiši gornji sistem NDE v ustrezno PDE za rodovno funkcijo $Q(x,t) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(t)$.

   (c) [20] Če ob času $t = 0$ populacija šteje $N_0 \in \mathbb{N}$ osebkov, reši PDE iz točke (b) ter določi verjetnost za dolgoročno izumrtje populacije

   $$\lim_{t\to\infty} P_0(t).$$