ANALIZA 4 (fin) - 2. kolokvij

23. 1. 2012

Ime in priimek:
Vpisna št.:

1. Z Laplacevo transofrmacijo poišči splošno rešitev naslednjega linearnega sistema NDE
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -9 \\ 16 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$
ki zadošča pogojem $x(0) = 4, y(0) = -5$.

2. Poišči vse ekstremale funkcionala
$$I[y] = \int_0^1 (y^2(x) + 4y'^2(x))\, dx$$
na prostoru $C[0,1]$ funkcij, ki zadoščajo vezi
$$y^2(1) - y^2(0) = 1.$$
Pomoč: Najprej vez zapiši v običajni integralski obliki.

3. Opazujmo verjetnostni populacijski model z enakima smrtnostjo in rodnostjo ($\alpha > 0$) ter konstantnim priseljevanjem ($\beta > 0$). Če $P_n(t), (n = 0, 1, 2, \ldots)$ pomeni verjetnost, da ob času t populacija šteje n osebkov, dinamiko tega modela opisuje naslednji (neskončni) sistem NDE (tu je $P_{-1}(t) := 0$)
$$\dot{P}_n = \alpha(n+1)P_{n+1} + (\alpha(n-1)+\beta)P_{n-1} - (2\alpha n + \beta)P_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
Predpostavimo tudi, da je število osebkov ob času $t = 0$ enako $N \in \mathbb{N}_0$
$$P_N(0) = 1, \quad P_n(0) = 0 \quad \text{za } n \in \mathbb{N}_0 - \{N\}.$$
(a) Dokaži, da za rodovno funkcijo
$$Q(x,t) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(t)$$

odtod sledi

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - \alpha \frac{\partial Q}{\partial x}(x-1)^2 = \beta(x-1)Q,$$
$$Q(x,0) = x^N.$$

(b) Reši nalogo iz (a).

4. Poišči rešitev naslednje naloge za funkcijo $u = u(x,t)$:

$$u_t = u_{xx} + x, \quad x \in (-1,1), \quad t > 0,$$

$$u(x=-1,t) = u(x=1,t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x,t=0) = 0, \quad x \in [-1,1].$$