Drugi kolokvij - Ana4(F)

Rešitve

1. (20) Podan je nelinearen sistem

$$\dot{x} = 1 - x^2, \quad \dot{y} = -2xy.$$

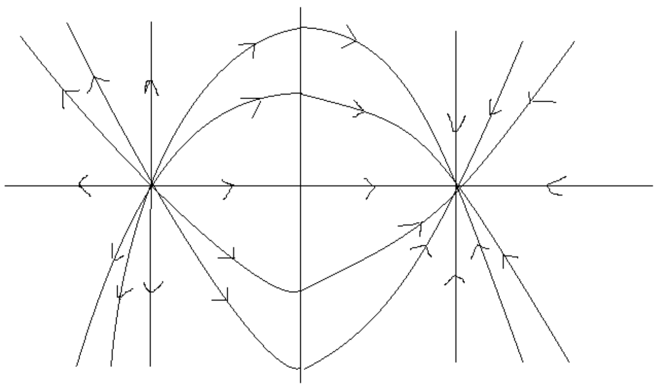
Poišči in klasificiraj njegove ravnovesne točke. Poišči njegov prvi integral (zvezo med x in y), ter nariši fazni portret.

Rešitev: Stacionarni točki sta $(\pm 1, 0)$. Zanju velja

$$Df(\pm 1, 0) = \begin{bmatrix} \mp 2 & 0 \\ 0 & \mp 2 \end{bmatrix}.$$

Torej je $(+1, 0)$ ponor, $(-1, 0)$ pa izvor. Prvi integral:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-2xy}{1 - x^2} \Rightarrow y = C(1 - x^2).$$



2. (30) a) Z metodo karakteristik poišči rešitev enačbe

$$uu_x + u_y = 0, \quad \text{p.p. } u(\alpha x^2, x) = \alpha x, \ x > 0.$$

Za katere vrednosti $\alpha \in \mathbb{R}$ je to edina rešitev enačbe?

b) Podana je parcialna diferencialna enačba

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = u_x - u_y.$$

Pretvori jo v kanonično obliko in poišči njeno rešitev.

Rešitev a) Najprej poiščemo parametrična rešitev karakterističnega sistema

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = 1, \quad \dot{u} = 0$$

pri začetnem pogoju $\Gamma(s) = (\alpha s^2, s, \alpha s)$, $s > 0$. Ta je enaka

$$x = \alpha s(t+s), \quad y = t+s, \quad u = \alpha s.$$

Eksplicitno jo lahko zapišemo kot

$$u = \frac{x}{y}.$$

Sedaj preverimo še transferzalnostni pogoj

$$(T) = \begin{bmatrix} a(x_0(s), y_0(s)) & a(x_0(s), y_0(s)) \\ \dot{x_0}(s) & \dot{y_0}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha s & 1 \\ 2\alpha s & 1 \end{bmatrix} = -\alpha s.$$

Izpolnjen je za vse $\alpha \neq 0$.

Rešitev b): Ker je $\Delta = 0$, je enačba parabolična. Za prvo novo tako vzamemo funkcijo, ki reši enačbo $t_x - t_y = 0$. Na primer $t = x + y$. Za drugo spremenljivko vzamemo funkcijo, ki je neodvisna od t, na primer $s = x$. Z njima se enačba izrazi kot

$$u_{ss} = u_s.$$

To je enačba drugega reda v s. Njena karakteristična enačba je $\lambda^2 = \lambda$. Splošna rešitev je torej enaka

$$u = F(t) + G(t)e^s$$

$$u = F(x+y) + G(x+y)e^x.$$

3. (30) Podana je valovna enačba $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

a) S separacijo jo reši za $t > 0$ in $0 < x < \pi$ pri pogojih:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = u(x,0) = 0 \quad \text{in} \quad u_t(x,0) = \sin x.$$

b) S Fourierjevo transformacijo jo reši za $t > 0$ in $x \in \mathbb{R}$ pri pogojih:

$$u(x,0) = e^{-x^2/2} \quad \text{in} \quad u_t(x,0) = 0.$$

Rešitev zapiši v obliki $u = \mathcal{F}^{-1}(U)$.

Rešitev a): Prek nastavka $u = X(x)T(t)$ dobimo sistem

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = \mu \in \mathbb{R}, \quad X(0) = X(\pi) = 0.$$

Izkaže se, da so lastni pari sistema za X enaki

$$\lambda_n = -n^2, \quad X_n(x) = \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

To porodi sistem za funkcije T

$$\frac{T''}{T} = -n^2 \Rightarrow T_n(t) = C_n \sin(nt) + D_n \cos(nt).$$

Nastavek za iskanje rešitve je torej

$$u(x,t) = \sum_{n=1} (C_n \sin(nt) + D_n \cos(nt)) \sin(nx).$$

Z upoštevanjem začetnih pogojev dobimo

$$u(x,0) = \sum_{n=1} D_n \sin(nx) = 0, \Rightarrow \; D_n = 0 \text{ za } n \geq 1$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1} nC_n \sin(nx) = \sin x \Rightarrow C_1 = 1, \; C_n = 0 \text{ za } n \geq 2$$

Rešitev je torej $u = \sin t \sin x$.

Rešitev b): Definiramo $U = \mathcal{F}(u)$ (transformacija po x):

$$U_{tt} + x^2 U = 0.$$

Torej je $U = C\cos(xt) + D\sin(xt)$. Iz začetnih pogojev ugotovimo, da je $D = 0$ in $C = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}$.

4. (20) Poišči in klasificiraj stacionarno točko funkcionala

$$F(y) = \int_0^1 \left[1 + y^2 + yy' + (y')^2\right] \mathrm{d}x$$

pri pogojih $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ in $\int_0^1 y \mathrm{d}x = 1$.

Rešitev: Definiramo

$$L_\lambda = 1 + y^2 + yy' + (y')^2 + \lambda y.$$

Euler Lagrangeova enačba je ekvivalentna

$$y'' = y' + \frac{\lambda}{2}.$$

Stacionarna točka je oblike $y(x) = Ae^x + Be^{-x} - \lambda/2$. Konstante določimo s sistemom enačb

$$y(0) = A + B - \lambda/2 = 0,$$

$$y(1) = Ae + B/e - \lambda/2 = 1,$$

$$\int_0^1 y\mathrm{d}x = Ae - B/e - \lambda/2 - A + B = 1.$$

Ker je $M_x = \mathbb{R}^2$ in

$$H_L = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3,$$

imamo v tej točki minimum.