Četrti kolokvij iz Analize 3
16. maj 2008

1. Naj bo $p \geqslant 2$ in naj bo $q$ konjugirani eksponent k $p$, torej
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$
Z $a_n$ označimo $n$–ti člen v Taylorjevem razvoju hipergeometrične funkcije $F(1, q^{-1}, p^{-1}; z)$ okrog točke 0. Dokaži oceno
$$a_n \leqslant n^{\delta}(p-1) ,$$
kjer je $\delta = 1 - 2/p$. Upoštevaj naslednje korake:
   (a) Pokaži, da zadošča preveriti
$$\frac{k + 1/q}{k + 1/p} \leqslant \left(\frac{k+1}{k}\right)^{\delta} \qquad \forall k \in \mathbb{N} . \tag{1}$$
   (b) S pomočjo substitucije $w^{-1} = 2k + 1$, $t^{-1} = \delta$ prevedi (1) na
$$t \log \frac{t+w}{t-w} \leqslant \log \frac{1+w}{1-w} .$$
   (c) Preveri, da velja
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t \log \frac{t+w}{t-w}\right) < 0$$
   in končaj dokaz.

2. Definirajmo operatorje $M, A, B$ takole:
$$Mf(x) = e^{x^2/2} f(x), \ \ Af(x) = xf(x) - f'(x), \ \text{ter } B = MAM^{-1} .$$
Če je $H_n$ Hermiteov polinom reda $n$ (oznake kot na vajah), izračunaj $BH_n$.

3. Če z $J_n$ označimo Besselovo funkcijo z indeksom $n \in \mathbb{N}$, preveri zvezo
$$(xJ_n(x)J_{n+1}(x))' = x(J_n(x)^2 - J_{n+1}(x)^2) .$$

4. Poišči ekstremalo funkcionala
$$I(y) = \int_0^{\pi/2} [y^2 + 2xyy' + (1 + \cos x)y'^2]\, dx ,$$
ob robnih pogojih $y(0) = 3$, $y(\pi/2) = 2$.

**Odgovore dobro utemelji.**