3. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1 (FM)

27. avgust 2013

Priimek in ime: ______________________________

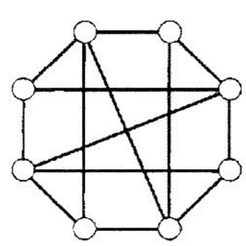
Vpisna št.: ______________ Vrsta: ______________ Kolona: ______________

1. Koliko različnih podgrafov, izomorfnih ciklom, ima graf K_6?

2. Koliko je nizov dolžine 5 iz črk slovenske abecede, ki vsebujejo vsaj en A, vsaj en O in vsaj en R?

3. Naj bo a_n število nizov dolžine n, ki jih lahko sestavimo iz nizov $0, 01, 011, 111$. Na primer, $a_4 = 9$, ker lahko sestavimo 9 nizov dolžine 4:
   $0, 0, 0, 0 \to 0000$,
   $0, 0, 01 \to 0001$,
   $0, 01, 0 \to 0010$,
   $01, 0, 0 \to 0100$,
   $01, 01 \to 0101$,
   $0, 011 \to 0011$,
   $011, 0 \to 0110$,
   $111, 0 \to 1110$,
   $0, 111 \to 0111$.
   Zapišite rekurzivno enačbo za a_n in jo rešite.

4. Določite lastnosti grafa G iz spodnje slike.
   (a) Ali je ravninski?
   (b) Kolikšna je njegova barvnost?
   (c) Ali je izomorfen svojemu komplementu?



Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič.
Vseeno pa ne pozabite napisati odgovorov!

3. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE (FM)

27. avgust 2013

(1)

$$\underbrace{\binom{6}{3}\cdot\frac{(3-1)!}{2}}_{\text{cikli dolž. 3}} + \underbrace{\binom{6}{4}\cdot\frac{(4-1)!}{2}}_{\text{cikli dolž. 4}} + \underbrace{\binom{6}{5}\cdot\frac{(5-1)!}{2}}_{5} + \underbrace{\frac{(6-1)!}{2}}_{6} =$$

izbira 3 vozlišč

cikli dolž. 3 (smer ni pomembna, zato delimo z 2)

$$= 20 + 15\cdot\frac{6}{2} + 6\cdot\frac{24}{2} + \frac{120}{2} = 197$$

(2)

A = { nizi dolž. 5, ki ne vsebujejo ~~...~~ "A" }

O = { −"− "O" }

R = { −"− "R" }

Iščemo $|\overline{A\cup O\cup R}|$.

$|A| = 24^5$ (vse črke, razen "A")

$|O| = |R| = 24^5$

$|A\cap O| = |A\cap R| = |O\cap R| = 23^5$

$|A\cap O\cap R| = 22^5$

$$|A\cup O\cup R| = |A|+|O|+|R| - |A\cap O| - |A\cap R| - |O\cap R| + |A\cap O\cap R|$$
$$= 3\cdot 24^5 - 3\cdot 23^5 + 22^5 = 9\ 732\ 475$$

Rezultat: vse možnosti − neugodne $= 25^5 - 9\ 732\ 475 = 33\ 150$

3

$a_1 = 1$ (0)

$a_2 = 2$ $(00, 01)$

$a_3 = 5$ $(000, \underbrace{0\,01}, \underbrace{01}0, 011, 111)$

Vsak niz, sestavljen iz $0, 01, 011, 111$ lahko sestavimo na en sam način, zato:

$\overbrace{\boxed{\quad n-1 \quad | \, 0}}^{n}$ dolžin n nizov, ki končajo z 0 je a_{n-1}

$\boxed{\quad n-2 \quad | \, 01}$ 01 a_{n-2}

$\boxed{\quad n-3 \quad | \, 011}$ 011 a_{n-3}

$\boxed{\quad n-3 \quad | \, 111}$ 111 a_{n-3}

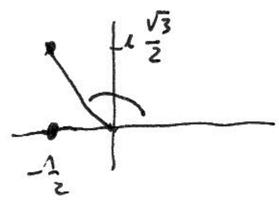
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3}$$

$a_1 = 1$
$a_2 = 2$
$a_3 = 5$
$a_0 = 1$ (ustreza rekurziji)

$$x^3 - x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x^2 + x + 1)(x-2) = 0$$

$x_1 = 2$ $\quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\varphi = \frac{2\pi}{3}$

$x_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}$

$$a_n = A \cdot 2^n + B\cos\frac{2n\pi}{3} + C\sin\frac{2n\pi}{3}$$

$n=0$: $1 = A + B$

$n=1$: $1 = 2A + B \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + C \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

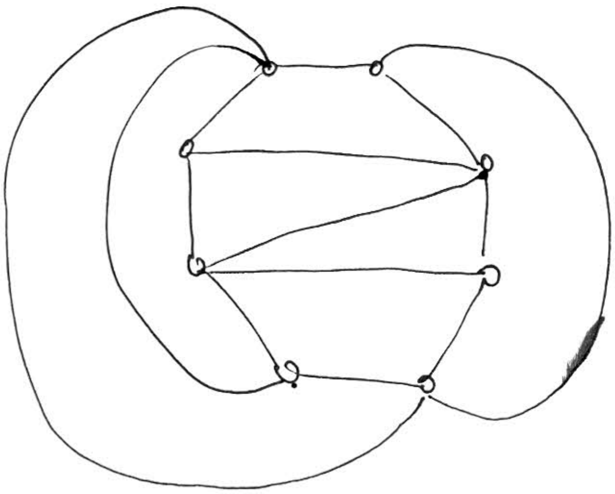
$n=2$: $2 = 4A - B \cdot \frac{1}{2} - C\frac{\sqrt{3}}{2}$

$A = \frac{3}{7}$

$B = \frac{4}{7}$

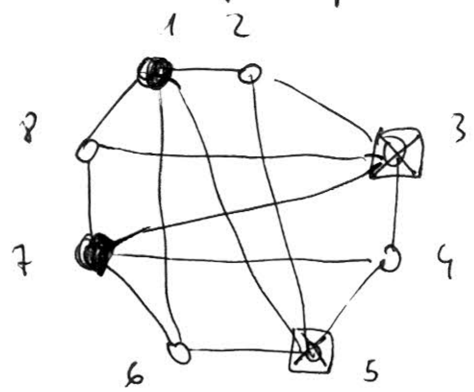
$C = \frac{2\sqrt{3}}{7}$

(4) a) Graf je ravninski:



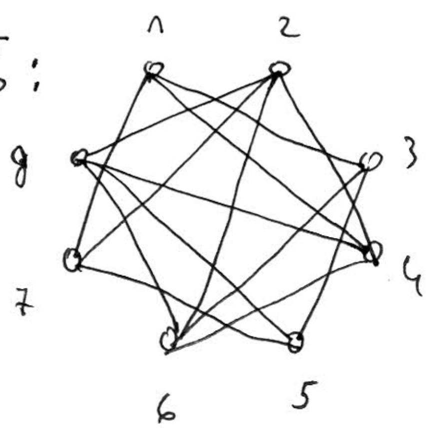
b) Ker G vsebuje cikel lihe dolžine (),
je barvnost vsaj 3.

Lahko ga pobarvamo s 3 barvami (torej $\chi(G) \leq 3$)



$\Rightarrow \chi(G) = 3$

c) $\bar{G}$:



$\bar{G}$ vsebuje poln podgraf K_4
(na vozliščih 2, 4, 6, 8),
G pa ne
$\Rightarrow$ nista izomorfna.

(Lahko najdete tudi kak
drug argument, naprimer:
v $\bar{G}$ so vozlišča st. 4 sosednja,
v G pa ne)