1. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1 (FM)

1. februar 2013

Rešitve

Priimek in ime: ________________________________

Vpisna št.: ____________ Vrsta: ____________ Kolona: ____________

1. (20 točk) Naj bo n naravno število in $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ množica moči $n + 1$. Pokažite, da v S obstajata dve števili, katerih vsota je enaka $2n + 1$.

Uporabimo Dirichletovo načelo.

Elementi: elementi množice S ($n+1$ elementov)

Škatle: n škatel $1, 2, \ldots, n$

v škatlo i damo i in $2n+1-i$, $i = 1, \ldots, n$

Ker je elementov več kot škatel, sta v vsaj eni škatli vsaj dve (različni) števili iz množice S, torej je njuna vsota enaka $2n+1$, saj imata dva različna elementa v isti škatli vsoto $2n+1$ $(= i + 2n+1-i)$.

Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič.

2. (30 točk) Na koliko načinov lahko 9 (različnih) igrač razdelimo med 4 otroke, če

(a) najmlajši dobi 3 igrače, ostali pa po dve igrači?

(b) vsak dobi vsaj eno igračo?

(c) nihče ne dobi več kot 4 igrače?

a) $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = 84 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 7560$

3 igrače izberemo za najmlajšega otroka

ostane jih še 6, 2 igrači izberemo za 2. otroka ...

b) 9 označenih elementov (igrač) porazdelimo v 4 označene celice (otroke), celice ne smejo biti prazne

$4!\, S(9,4) = 24 \cdot 7770 = 186\,480$

c) Nalogo rešimo s pomočjo pravila vključitev in izključitev.

Vseh možnih razdelitev je $4^9 = 262\,144$

A_i ... množica razdelitev, kjer otrok i dobi vsaj 5 igrač

$|A_i| = \binom{9}{5} \cdot 3^4 + \binom{9}{6} \cdot 3^3 + \binom{9}{7} \cdot 3^2 + \binom{9}{8} \cdot 3^1 + \binom{9}{9} \cdot 3^0$

otrok i 5 igrač ostale 4 igrače med 3 otroke

$= 126 \cdot 81 + 84 \cdot 27 + 36 \cdot 9 + 9 \cdot 3 + 1 = 12826$

$A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$ in tudi vsi večkratni preseki so prazni.

Skupaj torej!

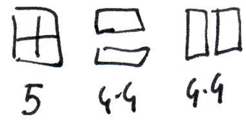
$262\,144 - 4 \cdot |A_1| = 262144 - 4 \cdot (12826)$

$= 210\,840$

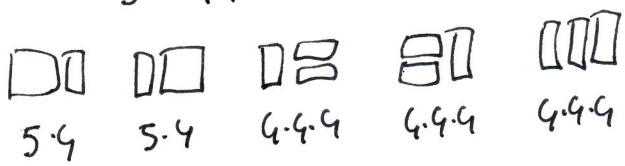
3. (25 točk) Na koliko načinov lahko pokrijemo šahovnico velikosti $2 \times n$ s ploščicami velikosti 2×1 in 2×2, če so ploščice 2×1 štirih različnih barv, ploščice 2×2 pa petih različnih barv? Zapišite in rešite rekurzivno enačbo. Opomba: ploščice velikosti 2×1 lahko postavljamo na šahovnico počez ali vzdolž šahovnice.

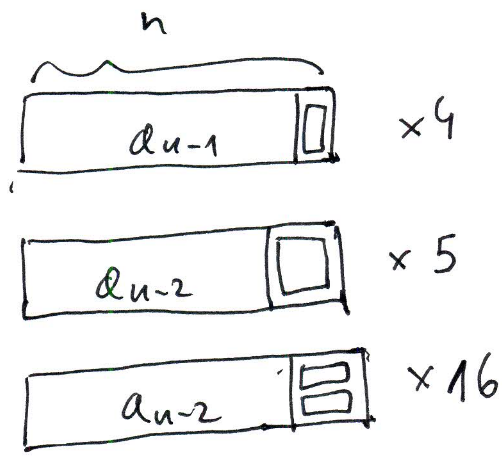
$a_1 = 4$ (samo ploščica 2×1)

$a_2 = 37$



$a_3 = 232$





$$a_n = 4a_{n-1} + 21a_{n-2}$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$(x-7)(x+3) = 0$$

$$x_1 = 7, \quad x_2 = -3$$

$$a_n = A \cdot 7^n + B \cdot (-3)^n$$

$$a_1 = 4 = A \cdot 7 + B \cdot (-3)$$

$$a_2 = 37 = A \cdot 7^2 + B \cdot (-3)^2$$

$$A = \frac{7}{10}, \quad B = \frac{3}{10}$$

Rešitev: $a_n = \frac{7}{10} \cdot 7^n + \frac{3}{10} \cdot (-3)^n$

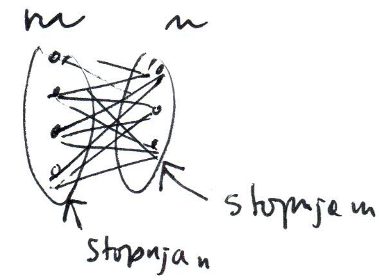
4. (25 točk) Naj bo $1 \leq n \leq m$. Za katere m, n je graf $K_{m,n}$

(a) Eulerjev?

(b) ravninski?

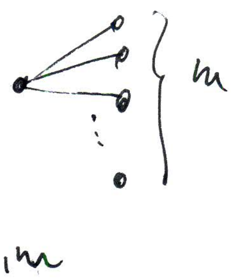
(c) Hamiltonov?

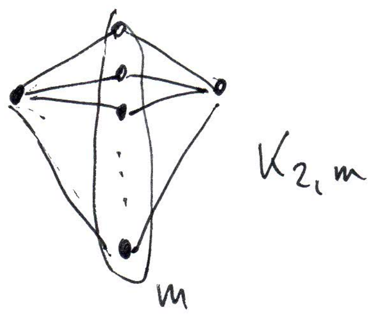
a) Graf je Eulerjev $\Leftrightarrow$ vse točke imajo sodo stopnjo $\Leftrightarrow$ m, n obe ~~sodna~~ soda.



b) $m, n \geq 3$: $K_{m,n}$ kot podgraf vsebuje $K_{3,3}$ $\Rightarrow$ ni ravninski

$n = 1, 2$, $m \geq n$, potem je $K_{m,n}$ ravninski:

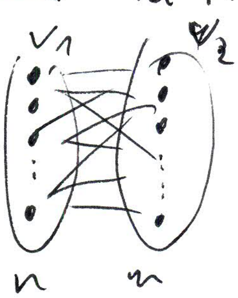




c) $K_{m,n}$ je Hamiltonov $\Leftrightarrow$ $m = n \geq 2$

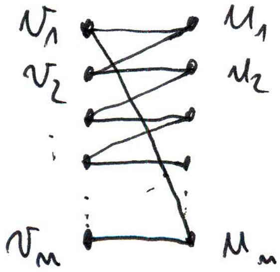
$m = n = 1$:  ni Hamiltonov

$m \neq n$:



Če $m > n$, odstranimo n vozlišč iz množice V_1, graf razpade na m komponent (točke iz V_2) $\Rightarrow$ $K_{m,n}$ ni Hamiltonov.

$m = n$



$V_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $V_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$

$V(K_{n,n}) = V_1 \cup V_2$ ~~dis~~ disjunktno razbitje mn. točk

Potem je $v_1 u_1 v_2 u_2 \ldots v_n u_n v_1$ Hamiltonov cikel v $K_{n,n}$.

Alternativno: uporabimo Diracov izrek: $\delta(K_{n,n}) = n \geq |V(K_{n,n})|/2 = \frac{2n}{2} = n$