2. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 1 (FM)

14. februar 2013

REŠITVE

Priimek in ime: ______________________________

Vpisna št.: __________ Vrsta: __________ Kolona: __________

1. (20 točk) Študent mora na izpitu rešiti vsaj sedem od desetih nalog. Na koliko načinov lahko to stori, če mora rešiti vsaj štiri izmed prvih šestih nalog?

Reši lahko 4, 5 ali 6 izmed prvih 6 nalog.

Če reši 4 naloge: reši še 3 ali 4 od nalog 7-10

5 : 2, 3 ali 4

6 : 1, 2, 3 ali 4

Skupaj torej:

$$\binom{6}{4}\left(\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right)+\binom{6}{5}\left(\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right)+\binom{6}{6}\left(\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right)=$$

$$=15(4+1)+6\cdot(6+4+1)+1\cdot(4+6+4+1)=75+66+15=156$$

Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič.

2. (30 točk) Na koliko načinov lahko zberemo 24 EUR od štirih otrok in šestih odraslih, če

(a) naj vsaka oseba da vsaj 1 EUR?

(b) naj vsaka oseba da vsaj 1 EUR in Janezek ne da več kot 4 EUR?

(c) naj vsaka oseba da vsaj 1 EUR in lahko vsak otrok da največ 4 EUR, vsak odrasel pa največ 7 EUR ?

a) Uporabimo porazdelitve: 24 neoznačenih elementov damo v 10 označenih celic, celice ne smejo biti prazne

$$\binom{24-1}{10-1} = \binom{23}{9} = \boxed{817\,190}$$

b) Od vseh možnosti odštejemo tiste, kjer Janezek da vsaj 5 EUR.

Teh možnosti je $\binom{20-1}{10-1} = \binom{19}{9}$ (Janezek da vnaprej 4, potem je treba plačati še 20. Ker vsak da vsaj 1, bo Janezek skupaj dal vsaj 5)

Torej: $\binom{23}{9} - \binom{19}{9} = 817\,190 - 92\,378 = \boxed{724\,812}$

c) Nalogo rešimo s pomočjo pravila vključitev in izključitev.

$|A_i|$ ... načini, kjer otrok i da vsaj 5

$|A_i| = \binom{19}{9} = 92\,378$ (kot pri točki b)

B_i ... razdelitve, kjer odrasel i da vsaj 8 (odštejemo 7 od skupne vsote)

$|B_i| = \binom{17-1}{10-1} = \binom{16}{9} = 11\,440$

Dva otroka vsaj po 5: $|A_i \cap A_j| = \binom{16-1}{10-1} = \binom{15}{9} = 5005$ $i \neq j$
(od 24 odštejemo 8)

Trije otroci vsaj po 5: $|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{12-1}{10-1} = \binom{11}{9} = 55$ i, j, k različni

Dva odrasla vsaj po 8: $|B_i \cap B_j| = \binom{10-1}{10-1} = 1$

En otrok vsaj 5, en odrasel vsaj 8: $|A_i \cap B_j| = \binom{13-1}{10-1} = \binom{12}{9} = 220$

Ostali preseki so prazni.

Pravilo vključitev in izključitev:

$$\binom{23}{9} - 4|A_i| - 6|B_i| + \binom{4}{2}|A_i \cap A_j| + \binom{6}{2}|B_i \cap B_j| + 4\cdot 6\cdot |A_i \cap B_j| - \binom{4}{3}|A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$= 817\,190 - 4\cdot 92\,378 - 6\cdot 11\,440 + 6\cdot 5005 + 15\cdot 1 + 24\cdot 220 - \binom{4}{3}\cdot 55$$

$$= \underline{\underline{414\,143}}$$

3. (25 točk) Z uporabo rodovnih funkcij rešite rekurzivno enačbo $a_n - 3a_{n-1} = 5 \cdot 3^{n+1}$ za $a_0 = 2$.

$$a_n - 3a_{n-1} = 5 \cdot 3^{n+1} \quad / \cdot x^n, \ \sum_{n=1}^{\infty}$$

$$\boxed{A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}_{A(x)-a_0} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 5 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} x^n$$

$$A(x) - a_0 - 3x \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1}}_{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n} = 5 \cdot 9 \cdot x \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} x^{n-1}}_{\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n}$$

$$A(x) - 2 - 3x\,A(x) = 45x \frac{1}{1-3x}$$

$$A(x)(1-3x) = 2 + 45x \frac{1}{1-3x} = \frac{45x + 2 - 6x}{1-3x} = \frac{39x+2}{1-3x}$$

$$\boxed{A(x) = \frac{39x+2}{(1-3x)^2}} = (39x+2) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{+2+n-1}{n} (3x)^n$$

koeficient pri x^n: $\binom{+2+(n-1)-1}{n-1} \cdot 39 \cdot 3^{n-1} + 2 \binom{+2+n-1}{n} \cdot 3^n$

$$= \binom{n}{n-1} \cdot 39 \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot \binom{n+1}{n} \cdot 3^n$$

$$= n \cdot 13 \cdot 3^n + 2 \cdot (n+1) \cdot 3^n$$

$$= 3^n (13n + 2n + 2) = (15n+2) \cdot 3^n$$

$$a_n = (15n+2) \cdot 3^n$$

4. (25 točk) Poiščite povezan enostaven graf G na 6 točkah oziroma pokažite, da ne obstaja:

(a) G ni dvodelen, $\overline{G}$ ni dvodelen.

(b) G je dvodelen, $\overline{G}$ je dvodelen.

(c) G je ravninski, $\overline{G}$ je ravninski.

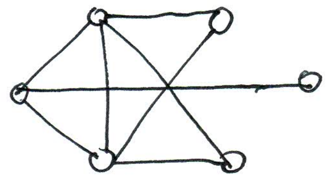
(d) G ni ravninski, $\overline{G}$ ni ravninski.

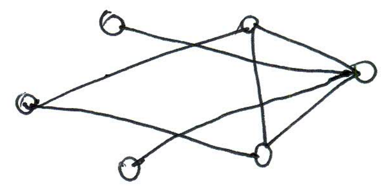
(e) $\overline{G}$ je povezan.

G in $\overline{G}$ imata skupaj

$\binom{6}{2} = 15$ povezav

a) Poskusimo, da imata G in $\overline{G}$ oba Δ (torej nista dvodelna)

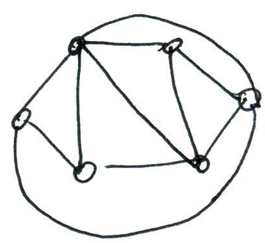
G: 

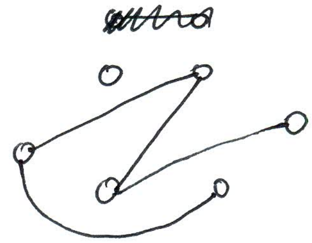
$\overline{G}$ 

b) Tak G ne obstaja.

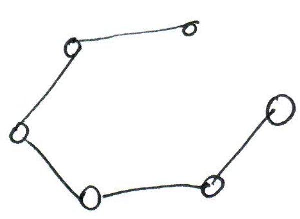
Dokaz. Naj bo G dvodelen graf, $V(G) = A \cup B$ dvodelno razbitje. Vsaj ena od množic A, B vsebuje vsaj tri točke. Tri točke so med sabo nepovezane in v komplementu tvorijo trikotnik, torej $\overline{G}$ ni dvodelen.

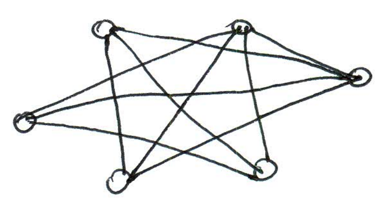
c) Za G vzemimo ravninski graf s čim več povezavami, za $\overline{G}$ bo potem ostalo malo povezav in bo tudi ravninski.

G 

$\overline{G}$: 

d) Tak G ne obstaja. Graf, ki ni ravninski, vsebuje vsaj 9 povezav (najmanjši neravninski graf je $K_{3,3}$, ki ima 9 povezav). G in $\overline{G}$ imata skupaj 15 povezav, rabilo bi jih vsaj 18.

e) G: 

$\overline{G}$ 

G in $\overline{G}$ sta oba povezana.