Del III

Rešitve

1. kolokvij, 26. marec 2008

1. Če kroglice ločimo med sabo, lahko 3 kroglice izmed 5 izberemo na

vrstni red je pomemben	kroglice vračamo (ponavljanje je dovoljeno)	število načinov
DA	DA	$5^3 = 125$
DA	NE	$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
NE	DA	$\binom{5+3-1}{3} = 35$
NE	NE	$\binom{5}{3} = 10$

   načinov. Če so kroglice enake, potem samo na en način izberemo 3 kroglice izmed 5.

2. Ločimo več primerov: imamo 4, 3, 2 ali 1 različnih mest, ki jih zasedejo avtomobili na koncu dirke. Za vsak primer posebej so mesta celice, ki jih razlikujemo in ne smejo biti prazne, avtomobili pa so elementi, ki jih tudi razlikujemo. Torej je

$$4!S(4,4) + 3!S(4,3) + 2!S(4,2) + 1!S(4,1) = 24 + 6 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 1 = 75$$

   različnih načinov, na katere se lahko konča dirka štirih avtomobilov, če so možni izenačeni izidi.

   Lahko sklepamo tudi takole. Če ni izenačenih izidov, so možni vrstni redi avtomobilov na koncu dirke vse permutacije štirih avtomobilov, ki jih je 4!. Če sta dva izida izenačena, na $\binom{4}{2}$ načinov izberemo avtomobila z istim izidom, imamo pa še 3! različnih vrstnih redov. V tem primeru je torej $\binom{4}{2} \cdot 3!$ možnih koncev dirke. Če imata dvakrat po dva avtomobila izenačen izid, izberemo par za prvo mesto na $\binom{4}{2}$ načinov in s tem je vrstni red že določen. Tri avtomobile za isti izid lahko izberemo na $\binom{4}{3}$ načinov, lahko pa so na prvem ali na drugem mestu. Končno se lahko konča dirka tudi tako, da vsi avtomobili pridejo na cilj hkrati. Torej imamo skupaj

$$4! + \binom{4}{2} \cdot 3! + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} \cdot 2 + 1 = 75$$

   možnih rezultatov dirke.

3. Janezek ima 9 kosov hrane, tri vrste hrane se pojavijo po dvakrat. Različnih zaporedij dolžine 9, od katerih se tri elementi pojavijo po dvakrat je $\frac{9!}{2!\,2!\,2!}$. Če se dva enaka elementa pojavita zaporedoma, ju štejemo za eno enoto. Tako je število zaporedij, kjer se (vsaj) dva enaka elementa pojavita zaporedoma, enako $\binom{3}{1}\frac{8!}{2!\,2!}$. Podobno je število zaporedij, kjer se vsaj dvakrat po dva enaka elementa pojavita zaporedoma, enako $\binom{3}{2}\frac{7!}{2!}$ in število zaporedij, kjer se trikrat po dva enaka elementa pojavita zaporedoma, enako 6! . Po pravilu vključitev in izključitev dobimo

$$\frac{9!}{2!\,2!\,2!} - \binom{3}{1}\frac{8!}{2!\,2!} + \binom{3}{2}\frac{7!}{2!} - 6! = 21960$$

   različnih načinov, kako lahko Janezek poje svojo hrano.

4. Označimo točke in njihove koordinate s $T_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, 5$. Razpolovišče daljice s krajišči T_i in T_j ima koordinate $(\frac{x_i+x_j}{2}, \frac{y_i+y_j}{2})$. Obe krajišči bosta celoštevilski, če imata prvi koordinati isto parnost in drugi koordinati isto parnost.

   Sestavimo lahko štiri razrede (škatle) točk glede na parnost koordinat (soda,soda), (soda, liha), (liha,soda), (liha,liha). Ker imamo 5 točk, sta vsaj dve v isti škatli - imata isto parnost pri obeh koordinatah. To pa pomeni, da ima razpolovišče ustrezne daljice celoštevilski koordinati.

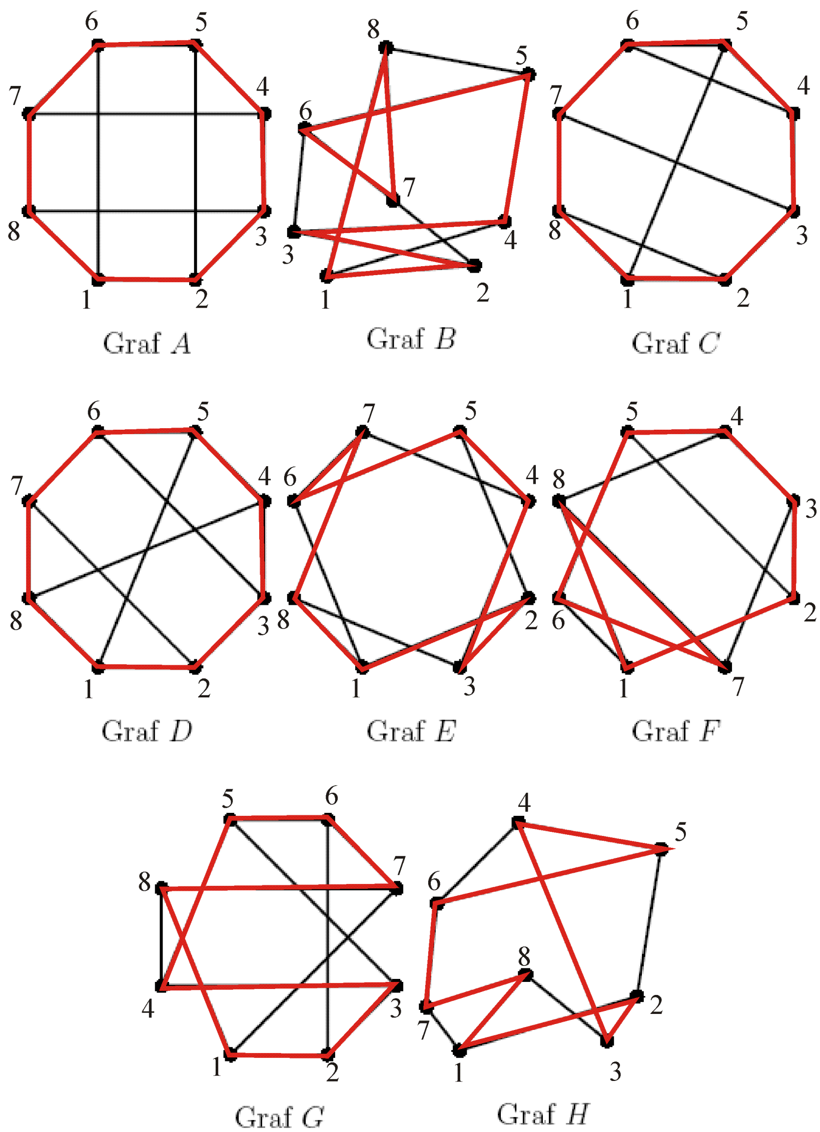
2. kolokvij, 2. junij 2008

1.

2.

3. Kateri grafi so izomorfni med sabo bomo najlažje ugotovili, če (nekatere) grafe lepše narišemo. Zato bomo v vsakem grafu najprej poiskali Hamiltonov cikel (če ga ima). Nato bomo najprej narisali Hamiltonov cikel in mu dodali manjkajoče povezave tako (če se bo le dalo), da se povezave ne sekajo. S tem bomo odgovorili še na vprašanje, ali je graf ravninski.

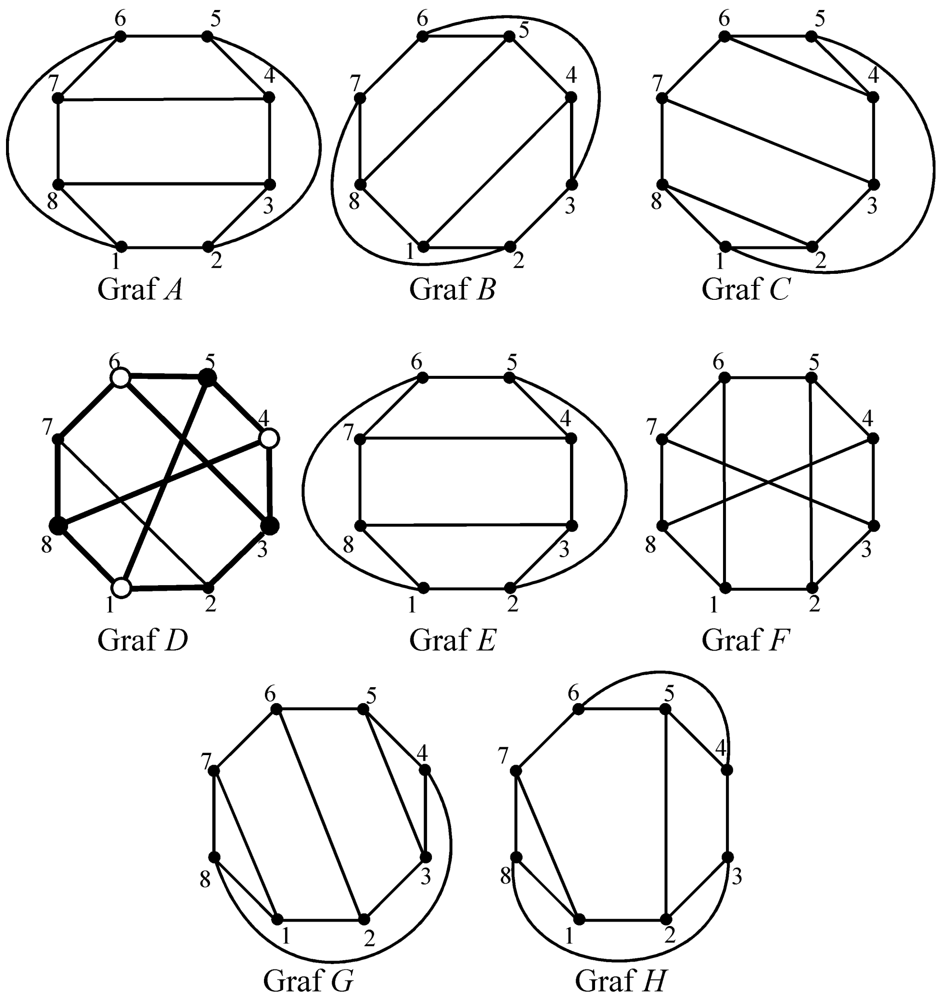
   Z nekaj truda v vsakem od grafov najdemo Hamiltonov cikel, na spodnji sliki so povezave iz Hamiltonovih ciklov pobarvane rdeče.



   Na naslednji sliki smo za vsak graf narisali Hamiltonov cikel v obliki osemkotnika in mu dodali dodali manjkajoče povezave. Graf D ni ravninski, saj vsebuje subdivizijo grafa $K_{3,3}$. Na sliki spodaj so njene točke in povezave odebeljene. Ker imata grafa D in F enaki sliki, sta izomorfna. Zato tudi graf F ni ravninski.

   Vsi ostali grafi so ravninski, saj smo jih uspeli v ravnino narisati tako, da se povezave ne sekajo. Zato nobeden od njih ni izomorfen grafoma D in G.

Grafi A, B in E imajo enako sliko (po potrebi sliko malo zasukamo), zato so izomorfni. Tudi grafa C in G imata enako sliko in sta zato izomorfna. Grafi A, B in E nimajo trikotnikov, zato niso izomorfni nobenemu od grafov C, G in H.



Preveriti je treba le še, ali je graf H izomorfen grafoma C oziroma G. To bi najlažje preverili, če bi nam uspelo grafa enako narisati (poskusite). Opazimo, da imata oba grafa po dva trikotnika ki sta povezana z eno povezavo. V grafu G imamo trikotnika $8, 1, 7$ in $4, 5, 3$, točki 8 in 4 sta sosednji. V grafu H imamo trikotnika $7, 1, 8$ in $6, 4, 5$, točki 7 in 6 sta sosednji. Poskusimo poiskati izomorfizem, ki trikotnika preslika v trikotnika in povezavo $(8 : 4)$ preslika v povezavo $(7 : 6)$. Z nekaj truda najdemo bijekcijo med množicama točk:

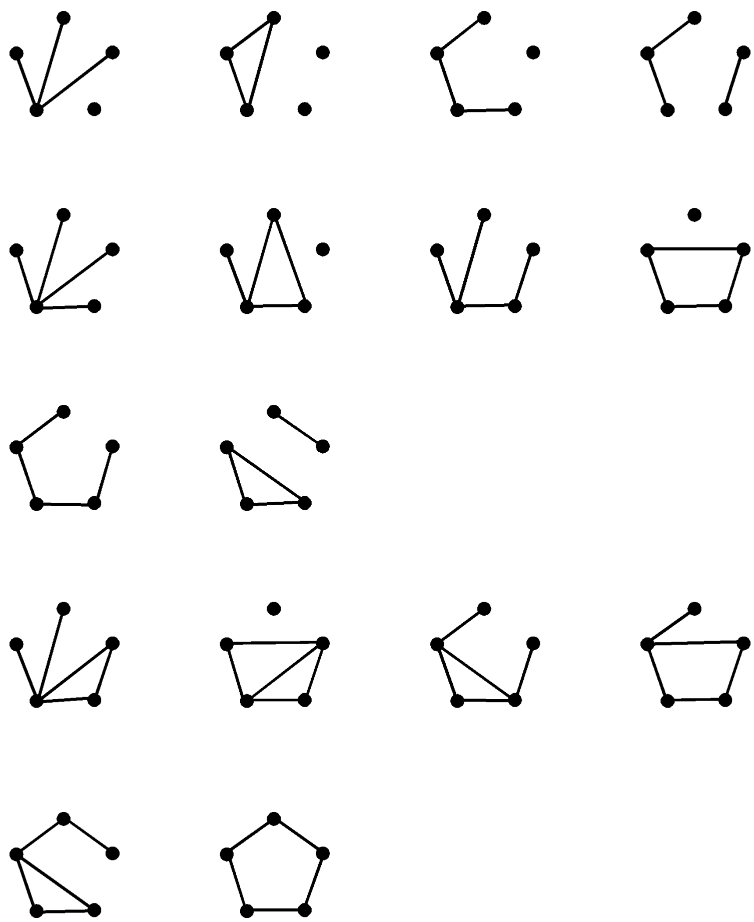
$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Preverimo še, da se povezave res preslikajo v povezave. V spodnji tabeli smo napisali, kam se preslikajo krajišča vsake povezave iz grafa G v grafu H. Ni težko preveriti, da so to tudi krajišča povezav v grafu H.

(1:2)	(1:7)	(1:8)	(2:3)	(2:6)	(3:4)	(3:5)	(4:5)	(4:8)	(5:6)	(6:7)	(7:8)
1,2	1,8	1,7	2,5	2,3	5,6	5,4	6,4	6,7	4,3	3,8	8,7

4. Grafe na 5 točkah naštejemo na nek sistematičen način, na primer glede na število povezav. Grafe z istim številom povezav pa uredimo na primer še glede na stopnje točk, najprej tiste s točkami večjih stopnej.

   Imamo en graf z 0 povezavami, en graf z eno povezavo, dva grafa z dvema povezavama (povezavi sta lahko sosednji ali ne), štiri grafe s tremi povezavami, šest grafov s štirimi povezavami in šest grafov s petimi povezavami, glej spodnjo sliko.



   Ker sta dva grafa izomorfna natanko tedaj, ko sta izomorfna njuna komplementa, je grafov s šestimi povezavami toliko, kot grafov s štirimi povezavami, grafov s sedmimi povezavami toliko, kot grafov s tremi povezavami in tako naprej. Na petih točkah imamo torej $1+1+2+4+6+6+6+4+2+1+1=34$ neizomorfnih grafov.

1. izpit, 10. junij 2008

1. Izmed 18 ljudi (10 moških, 8 žensk) lahko izberemo 12 ljudi na

$$\binom{18}{12} = \binom{18}{6} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 18564$$

   načinov. Če mora biti žensk toliko kot moških, izberemo 6 žensk izmed 8 in 6 moških izmed 10, kar lahko storimo na

$$\binom{8}{6} \cdot \binom{10}{6} = \binom{8}{2} \cdot \binom{10}{4} == \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5880$$

   načinov. Če je v komisiji sodo število žensk, jih je lahko 8, 6, 4 ali 2. Vsaj dve ženski morata biti v komisiji, ker je moških samo 10. Komisijo lahko izberemo na

$$\binom{8}{8} \cdot \binom{10}{4} + \binom{8}{6} \cdot \binom{10}{6} + \binom{8}{4} \cdot \binom{10}{8} + \binom{8}{2} \cdot \binom{10}{10} = 210 + 28 \cdot 210 + 70 \cdot 45 + 28 = 9268$$

   načinov.

2. Vsako naravno število n lahko enolično zapišemo v obliki

$$n = 2^k \cdot \ell,$$

   kjer je $k \geq 0$ in ℓ liho število; številu ℓ pravimo *lihi del* števila n. Med števili 1,2,...,200 je točno 100 lihih števil - možnih lihih delov za števila med 1 in 200 je torej 100. Če izberemo 101 števil med 1 in 200, morata torej dve števili imeti isti lihi del. Če sta števili enaki, eno deli drugo, če pa sta različni, manjše od njiju deli večje.

3.

4.

2. izpit, 2. september 2008

1. Razporeditve ljudi okoli okrogle mize ustrezajo cikličnim permutacijam. Cikličnih permutacij 7 elementov je $6! = 720$; cikel, ki ustreza ciklični permutaciji, sestavimo tako, da element na prvem mestu fiksiramo, različne permutacije ostalih elementov pa določajo različne cikle. Če dva želita sedeti skupaj, ju štejemo za eno enoto in štejemo ciklične permutacije 6 elementov. Upoštevati moramo še, da imamo dva vrstna reda za ta dva človeka. Torej je $2 \cdot 5! = 240$ ustreznih razporeditev.

2. Postavimo v vrsto najprej 3 rdeče kolesarje in za njimi še 4 modre kolesarje. Sedaj lahko postavimo bele kolesarje na 8 različnih mest - pred prvega rdečega kolesarja, za zadnjega modrega kolesarja in med poljubna dva rdeča ali modra kolesarja. Več belih kolesarjev lahko postavimo tudi na isti prostor. Tri mesta za bele kolesarje lahko torej izberemo na

$$\binom{8+3-1}{3} = 120$$

načinov. Če kolesarjev iste barve ne ločimo, jih lahko torej razvrstimo na 120 načinov. Če kolesarje med sabo razlikujemo, je potrebno to število pomnožiti še z vsemi vrstnimi redi rdečih, modrih in belih kolesarjev. Imamo torej

$$120 \cdot 3! \cdot 4! \cdot 3! = 103680$$

ustreznih razvrstitev.

3.

4.

1. kolokvij, 19. november 2008

1. Poglejmo po vrsti, kakšne lastnosti ima dani graf:

   - regularen: je, vse točke imajo stopnjo 3;
   - dvodelen: ni, ker vsebuje cikle lihe dolžine, na primer petkotnik $1, 2, 3, 4, 5, 1$;
   - Eulerjev: ni, ker nimajo vse točke sode stopnje.
   - Hamiltonov: je, ker ima Hamiltonov cikel, na primer $1, 2, 7, 6, 8, 3, 4, 9, 10, 5, 1$;
   - ravninski: ni, ker vsebuje podgraf, ki je skrčljiv na $K_{3,3}$. Takšen podgraf dobimo na primer tako, da za bele točke vzamemo točke $1, 4$ in 10, za črne točke pa točke $2, 5$ in 9. Vsako belo točko lahko povežemo s potjo z vsako črno točko tako, da se poti ne sekajo;
   - najmanjše število potez, da ga narišemo: ker ima 10 točk lihe stopnje, potrebujemo $10/2 = 5$ potez.

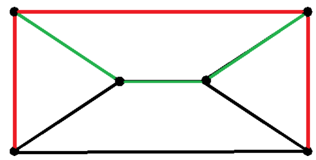
2. Graf iz prve naloge vsebuje 3 cikle dolžine 4. To so $1, 2, 7, 6, 1$, $3, 4, 9, 8, 3$ in $4, 5, 10, 9, 4$. Prvi graf iz druge naloge vsebuje samo dva cikla dolžine 4 ($1, 6, 10, 5, 1$ in $2, 3, 8, 7, 2$). Zato ta dva grafa ne moreta biti izomorfna.

   Opazimo, da z zamenjavo položajev točk 6 in 7 na sliki drugega grafa iz druge naloge dobimo enako sliko kot za graf iz prve naloge. Torej sta grafa izomorfna. Ustrezni izomorfizem podamo s permutacijo točk:

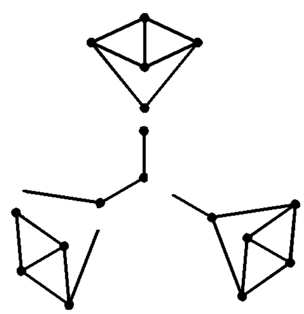
$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Preveriti je še treba, da se povezave preslikajo v povezave. Glede na to, da se zamenjata samo točki 6 in 7, je dovolj preveriti povezave, ki imajo ti dve točki za krajišča: $\varphi((6:1)) = (7:1)$, $\varphi((6:7)) = (7:6)$, $\varphi((6:8)) = (7:8)$, $\varphi((7:2)) = (6:2)$ in $\varphi((7:10)) = (6:10)$. Vse slike povezav so res povezave v drugem grafu iz druge slike in obratno, zato je φ izomorfizem in sta grafa izomorfna.

3. (a) P_4-risba grafa G_1 obstaja, glej spodnjo sliko.



(b) P_4-risba grafa G_2 ne obstaja. Sklepamo takole. Graf lahko pokrijemo s P_4-risbami le, če je število njegovih povezav deljivo s 3. To je za graf G_2 sicer izpolnjeno, vendar pa je graf G_2 je sestavljen iz treh delov, ki so s po eno povezavo povezane s točko v sredini. Ker je v vsakem delu po 8 povezav, vsakega dela posebej ne moremo pokriti s P_4-risbami. Ena P_4-risba bo zato pokrila točko v sredini in eno povezavo iz enega dela ter dve povezavi iz enega od drugih dveh delov. Če te tri povezava odstranimo iz grafa, nam ostanejo tri nepovezane komponente, od katerih ima ena 6 povezav, ena 7 povezav in ena 8 povezav (glej spodnjo sliko). Zadnjih dveh pa ne moremo pokriti s P_4-risbami, saj števili povezav, ki jih imata, nista deljivi s 3.

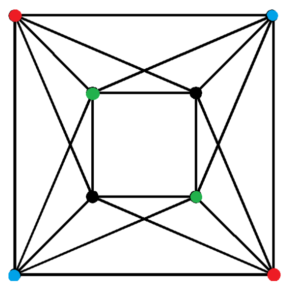
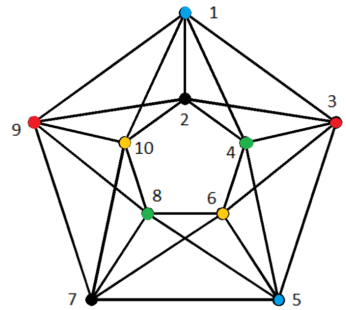


4. (a) Trditev velja. Eulerjev graf ima Eulerjev obhod. Vsak obhod v dvodelnem grafu ima sodo število povezav, torej ima tudi Eulerjev obhod sodo število povezav. Ker pa nastopa v Eulerjevm obhodu vsaka povezava grafa natanko enkrat, ima graf sodo število povezav.

   (b) Trditev ne velja. Eulerjev graf s sodo točkami in liho povezavami lahko sestavimo na primer iz cikla dolžine 3 in cikla dolžine 4 tako, da ju zlepimo skupaj v točki. Tako dobimo graf s 6 točkami in 7 povezavami, ki je Eulerjev: ena točka ima stopnjo štiri, pet točk pa ima stopnjo dva.

2. kolokvij, 14. januar 2009

1. Prvi graf ima kliko velikosti 4 (sestavljajo jo na primer gornje 4 točke), zato je njegova barvnost vsaj štiri. Ker lahko graf pobarvamo s štirimi barvami, glej sliko spodaj, je njegova barvnost enaka 4.

   Tudi drugi graf ima kliko velikosti vsaj 4, zato potrebujemo vsaj 4 barve. Poskusimo ga pobarvati s štirimi barvami. Začnemo z eno od klik, na primer tisto, ki vsebuje točke 1, 2, 3 in 4. Vsako točko moramo pobarvati z drugo barvo, na primer točko 1 pobarvamo modro, točko 2 črno, točko 3 rdeče in točko 4 zeleno. Ker sta točki 5 in 6 sosedji točkama rdeče in zelene barve, moramo zanju uporabiti modro in črno barvo. Zato moramo za točki 7 in 8 uporabiti rdečo in zeleno barvo. Potem pa moramo točki 9 in 10 pobarvati z modro in črno barvo. Vendar pa imata ti dve točki obe že sosedi modre in črne barve - to sta točki 1 in 2. To pa pomeni, da grafa ne moremo pobarvati s štirimi barvami. Lahko pa ga pobarvamo s petimi barvami, glej gornjo sliko. Barvnost drugega grafa je torej enaka 5.

2. (a) Dovolj je, da preštejemo, na koliko načinov lahko dobi bankovce Andrej, saj Bojan dobi tiste, ki ostanejo. Bankovce za 50 EUR lahko dobi na 7 načinov ($0, 1, \ldots, 6$ bankovcev), bankovce za 100 EUR pa lahko dobi na 5 načinov ($0, 1, \ldots, 4$ bankovcev), skupaj torej $7 \cdot 5$ načinov. Odšteti je treba še tiste razdelitve, pri katerih eden od ne dobi nobenega bankovca; takšni razdelitvi sta dve (Andrej ne dobi nič, Bojan ne dobi nič). Torej si lahko razdelita bankovce na 33 načinov.

   (b) Nalogo rešimo z naštetjem vseh možnosti. Najprej naštejemo vse možnosti za Andreja, preostale bankovce dobi Bojan.

Andrej	Bojan
5×50	$1 \times 50 + 4 \times 100$
$4 \times 50 + 1 \times 100$	$2 \times 50 + 3 \times 100$
$3 \times 50 + 2 \times 100$	$3 \times 50 + 2 \times 100$
$2 \times 50 + 3 \times 100$	$4 \times 50 + 1 \times 100$
$1 \times 50 + 4 \times 100$	5×50

   (c) Nalogo rešimo z naštetjem vseh možnosti. Vsak dobi 350 EUR, torej mora dobiti liho število bankovcec za 50 EUR. Ker je na voljo samo 6 bankovcev po 50 EUR, dobi vsak najmanj enega in največ 5 bankovcev po 50 EUR.

   Najprej naštejemo vse možnosti za Andreja, preostale bankovce dobi Bojan.

Andrej	Bojan
$1 \times 50 + 3 \times 100$	$5 \times 50 + 1 \times 100$
$3 \times 50 + 2 \times 100$	$3 \times 50 + 2 \times 100$
$5 \times 50 + 1 \times 100$	$1 \times 50 + 3 \times 100$

3. (a) Za število pik na enem delu domine imamo $n+1$ možnosti: $0, 1, \ldots, n$. Domin z različnima številoma pik na vsakem delu je $\binom{n+1}{2}$, imamo pa še $n+1$ domin z enakim številom pik na vsakem delu, skupaj torej $\binom{n+1}{2} + (n+1)$.

   Za primer $n = 6$ imamo torej $\binom{7}{2} + 7 = 21 + 7 = 28$ različnih domin.

   (b) Število pik, pri katerem se bosta domini ujemali, lahko izberemo na $n+1$ načinov. Izmed domin, ki vsebujejo to številko, izberemo dve. Domin, ki vsebujejo dano številko pa je $n+1$. Torej je iskano število izborov enako $(n+1)\binom{n+1}{2}$.

   Za primer $n = 6$ imamo torej $7\binom{7}{2} = 147$ možnosti.

4. Karakteristični polinom enačbe je $K(x) = x^3 - 3x + 2 = (x+1)^2(x-2)$. Ničli sta -1 (2. stopnje) in 2 (1. stopnje). Zato je splošna rešitev enačbe enaka

$$a_n = (A + B \cdot n)(-1)^n + C \cdot 2^n\,.$$

   Konstante A, B in C izračunamo iz začetnih pogojev:

$$\begin{aligned}
a_0 &= (A + B \cdot 0)(-1)^0 + C \cdot 2^0 = A + C = 0 \\
a_1 &= (A + B \cdot 1)(-1)^1 + C \cdot 2^1 = -A - B + 2C = 1 \\
a_2 &= (A + B \cdot 2)(-1)^2 + C \cdot 2^2 = A + 2B + 4C = 5.
\end{aligned}$$

   Rešimo sistem treh enačb s tremi neznankami in dobimo $A = -\frac{7}{9}$, $B = \frac{4}{3}$ in $C = \frac{7}{9}$. Rešitev gornje rekurzivne enačbe je torej

$$a_n = (-\frac{7}{9} + \frac{4}{3}n)(-1)^n + \frac{7}{9}2^n\,.$$

1. izpit, 9. februar 2009

1. Poglejmo po vrsti, kakšne lastnosti ima dani graf:

   - Eulerjev: ni, ker nimajo vse točke sode stopnje;
   - najmanjše število potez, da ga narišemo: ker ima 6 točk lihe stopnje, potrebujemo $6/2 = 3$ poteze;
   - Hamiltonov: ni, če odstranimo srednji trikotnik (3 točke), graf razpade na 4 komponente (najmanjši trikotnik in tri točke na zunanjem trikotniku) in zato ne more imeti Hamiltonovega cikla;
   - ravninski: ni, ker vsebuje K_5 kot podgraf, na primer podgraf induciran s točkami iz najmanjšega trikotnika skupaj z dvema točkama iz srednjega trikotnika;

- sebi komplementaren: ni, pogledati je treba le stopnje točk, ki se ne ujemajo. Stopnje točk v grafu so 8,8,8,5,5,5,3,3,3, stopnje točk v komplementu pa 0,0,0,3,3,3,5,5,5.
- Barvnost grafa je enaka 6. Potrebujemo najmanj 6 barv, ker graf vsebuje kliko velikosti 6 (če pogledamo 6 točk v sredini, opazimo, da so vse povezane med seboj). Graf lahko pobarvamo s 6 barvami (6 točk v sredini pobarvamo vsako s svojo barvo, vsaka točka na zunanjem trikotniku pa imaj samo tri sosede in jo lahko pobarvamo z eno od preostalih treh barv). Barvnost grafa je torej enaka 6.

2. Naj bo $G = (V, E)$ enostaven graf na 20 točkah in naj za poljubni točki $u, v \in V$ velja $d(u)+d(v) \geq 19$. Recimo, da G ni povezan. Potem množica točk grafa razpade na dva dela V_1 in V_2 tako, da nobena povezava ne povezuje točke iz V_1 s točko iz V_2. Naj bo $n_1 = |V_1|$ in $n_2 = |V_2|$. Potem velja $1 \leq n_1 \leq 19$, $1 \leq n_2 \leq 19$ in $n_1 + n_2 = 20$. Največja možna stopnja točke iz V_1 je $n_1 - 1$, največja možna stopnja točke iz V_2 pa je $n_2 - 1$. Vzemimo $v_1 \in V_1$ in $v_2 \in V_2$. Potem je $d(v_1) + d(v_2) \leq n_1 - 1 + n_2 - 1 = 20 - 2 = 18$, protislovje. Predpostavka, da graf G ni povezan, nas je pripeljala v protislovje. Torej mora biti graf G povezan.

3. (a) Vsako izmed 6 ploskev lahko pobarvamo na 3 načine, skupaj imamo $3^6 = 729$ načinov.

   (b) Nalogo lahko rešimo z uporabo porazdelitev. Elementi so ploskve (6), ki jih ločimo med sabo, saj so oštevilčene. Celice so barve (3), ločimo jih med sabo, celice ne smejo biti prazne. Po formuli je takšnih porazdelitev $3!\,S(6,3) = 540$.

   Nalogo lahko rešimo tudi tako, da od vseh možnosti odštejemo tiste, pri katerih nismo uporabili vseh barv. Z uporabo pravila vključitev in izključitev dobimo $3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3 = 729 - 3 \cdot 64 + 3 = 540$ načinov.

4. Pri tej nalogi štejemo števila n oblike

$$n = 10^5 \cdot a_5 + 10^4 \cdot a_4 + 10^3 \cdot a_3 + 10^2 \cdot a_2 + 10 \cdot a_1 + a_0,$$

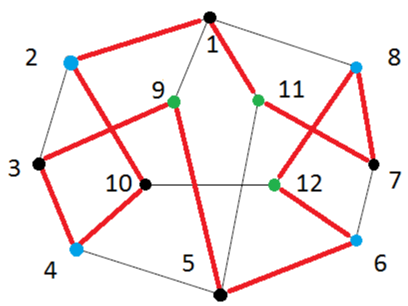
   kjer je $0 \leq a_5 \leq a_4 \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0$. Iz množice $\{0, 1, \ldots, 9\}$ izberemo šest števk s ponavljanjem, število pa je s tem že enolično določeno, saj velja $0 \leq a_5 \leq a_4 \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0$. Ustreznih števil je torej $\binom{10+6-1}{6} = \binom{15}{6} = 5005$.

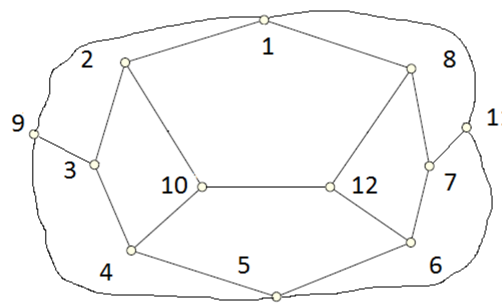
2. izpit, 18. februar 2009

1. Poglejmo po vrsti, kakšne lastnosti ima dani graf:

   - Eulerjev: ni, ker nimajo vse točke sode stopnje;
   - najmanjše število potez, da ga narišemo: ker ima 10 točk lihe stopnje, potrebujemo $10/2 = 5$ potez;

- Hamiltonov: je, ker ima Hamiltonov cikel, na primer $1, 2, 10, 4, 3, 9, 5, 6, 12, 8, 7, 11, 1$, glej tudi spodnjo sliko levo, kjer so povezave iz Hamiltonovega cikla pobarvane rdeče;
- ravninski: je, ker ga lahko v ravnino narišemo tako, da se povezave ne sekajo, glej spodnjo sliko desno, kjer smo prestavili samo točki 9 in 11;
- Barvnost grafa je enaka 3. Potrebujemo najmanj 3 barve, ker graf vsebuje cikel lihe dolžine, na primer $1, 2, 10, 12, 8, 1$. Graf lahko pobarvamo s 3 barvami, glej spodnjo sliko levo. Barvnost grafa je torej enaka 3.





2. Drevo z n točkami ima $n-1$ povezav. Po drugi strani ima samokomplementaren graf z n točkami polovico vseh možnih povezav, to je $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$. Število točk samokomplementarnega drevesa mora torej zadoščati enačbi

$$n - 1 = \frac{1}{2}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$

oziroma

$$(n-4)(n-1) = 0.$$

Samokomplementarno drevo ima torej lahko 1 točko (torej je graf z eno točko in nič povezavami, ki je samokomplementaren) ali pa ima 4 točke. Ker ima vsako drevo vsaj dva lista, bosta imeli dve točki stopnjo 1, drugi dve točki pa morata imeti stopnjo 2 (da bosta imeli stopnjo 1 v komplementu). Edino takšno drevo je pot na 4 točkah. Tudi njegov komplement je pot na 4 točkah. Torej imamo tudi eno samokomplementarno drevo na 4 točkah.

3. (a) Naloga je enakovredna naslednji: na koliko načinov lahko n enakih kroglic razdelimo v tri različne škatle, pri čemer so škatle lahko prazne (kroglice so enote, vsaka škatla pa je en sumand). To lahko naredimo na

$$\binom{n+3-1}{3-1} = \binom{n+2}{2}$$

načinov. Za $n = 15$ je to enako

$$\binom{17}{2} = \frac{17 \cdot 16}{2} = 136.$$

(b) Če vrstni red sumandov ni pomemben, lahko število n zapišemo kot vsoto treh nenegativih celih števil na $p(n,1)+p(n,2)+p(n,3)$ načinov, ker je lahko eden od sumandov ali oba enak nič. Za $n = 15$ je to enako $p(15,1)+p(15,2)+p(15,3) = 1+7+19 = 27$ načinov. Števila $p(n,k)$ izračunamo s pomočjo rekurzivne zveze $p(n,k) = p(n-k,k)+p(n-1,k-1)$ in dejstva, da je $p(n,1) = 1$ in $p(n,k) = 0$ za $k > n$.

(c) Za $n = n_1 + n_2 + n_3$ je $7^n = 7^{n_1} \cdot 7^{n_2} \cdot 7^{n_3}$, torej je rešitev enaka kot v točki (a).

(d) Rešitev je enaka kot v točki (b).

4. Karakteristični polinom enačbe $K(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x+1)(2x-1)$ ima ničle $1, -1$ in $1/2$. Zato je splošna rešitev homogene enačbe enaka

$$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot (-1)^n + C \cdot (1/2)^n.$$

Konstante A, B in C izračunamo iz začetnih pogojev:

$$\begin{aligned} a_0 &= A \cdot 1^0 + B \cdot (-1)^0 + C \cdot (1/2)^0 = A + B + C = 0 \\ a_1 &= A \cdot 1^1 + B \cdot (-1)^1 + C \cdot (1/2)^1 = A - B + C/2 = 1 \\ a_2 &= A \cdot 1^2 + B \cdot (-1)^2 + C \cdot (1/2)^2 = A + B + C/4 = 2. \end{aligned}$$

Rešimo sistem treh enačb s tremi neznankami in dobimo $A = 5/2$, $B = 1/6$ in $C = -3/8$. Rešitev gornje rekurzivne enačbe je torej enaka

$$a_n = 5/2 + 1/6 \cdot (-1)^n - (3/8) \cdot (1/2)^n \,.$$

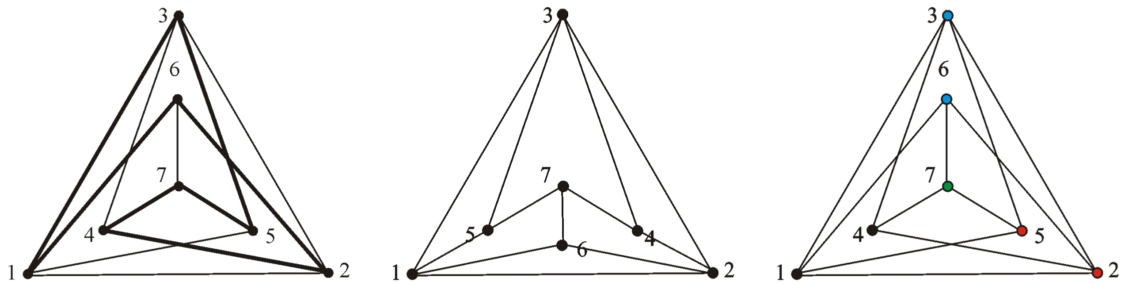
3. izpit, 14. september 2009

1. Graf ima Hamiltonov cikel, na primer $1, 3, 5, 4, 2, 6, 1$, glej tudi spodnjo sliko levo, kjer so povezave iz Hamiltonovega cikla narisane z debelejšo črto.

   Graf je ravninski, saj ga lahko narišemo v ravnino tako, da se povezave ne sekajo, glej spodnjo sliko v sredini. Ravninsko sliko smo dobili tako, da smo v prvotni sliki le zamenjali položaja točk 4 in 5 ter premaknili točko 6.

   Ker graf vsebuje cikle lihe dolžine, je njegova barvnost vsaj tri. Poskusimo sedaj graf pobarvati s tremi barvami. Za zunanji lihi cikel potrebujemo tri barve; točke 1, 2 in 3 moramo pobarvati s tremi različnimi barvami, na primer črno, rdečo in modro. Točka 4 ima sedaj soseda rdeče in modre barve, zato jo moramo pobarvati s črno barvo. Točka 5 ima soseda črne in modre barve, zato jo moramo pobarvati s rdečo barvo. Točka 6 ima soseda črne in rdeče barve, zato jo moramo pobarvati z modro barvo. Sedaj pa ima točka 7 sosede treh različnih barv in moramo zanjo uporabiti četrto barvo. Potrebujemo torej vsaj štiri barve. Ker pa smo graf uspeli pobarvati s štirimi barvami, je njegova barvnost enaka štiri.

2. Označimo z m število povezav, z n_5 število točk stopnje 5 in z n_6 število točk stopnje 6 v grafu G. Potem velja $n_5+n_6 = 15$. Ker je graf G ravninski, je $m \leq 3\cdot15-6 = 39$.



Po lemi o rokovanju vemo še, da je $2m = 5n_5 + 6n_6$. Torej je $5n_5 + 6n_6 \leq 78$. Vsak ravninski graf ima vsaj eno točko stopnje največ 5. Torej je $n_5 \geq 1$. Preverimo zdaj vse možnosti za n_5 in n_6:

n_5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n_6	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$5n_5 + 6n_6$	89	88	87	86	85	84	83	82	81	80	79	78	77	76	75

Ker mora biti $5n_5 + 6n_6$ sodo število, imamo le dve možnosti: $n_5 = 12$, $n_6 = 6$ in $n_5 = 14$, $n_6 = 1$.

3. Dvojiških zaporedij dolžine 8, ki imajo i enic, je $\binom{8}{i}$, saj lahko na toliko načinov izberemo mesta, komor postavimo enice. Dvojiških zaporedij dolžine 8, ki imajo sodo število enic (torej 0,2,4,6,8), je potem

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{2} + \binom{8}{4} + \binom{8}{6} + \binom{8}{8} = 1 + 28 + 70 + 28 + 1 = 128.$$

4. Označimo z a_n število načinov, na katere lahko zložimo na kupček n žetonov rdeče, bele in modre barve, če nikoli ne položimo dveh rdečih žetonov zaporedoma. Potem je $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ za $n \geq 3$. Sklepamo takole. Ustreznih kupčkov višine n, ki se končajo z belim žetonom, je a_{n-1}. Enako velja za modre žetone. Če pa se kupček višine n konča z rdečim žetonom, mora biti pod njim moder ali bel žeton. Takšnih zaporedij je torej $2a_{n-2}$. Izračunamo še $a_1 = 3$ in $a_2 = 8$ ter rešimo rekurzivno enačbo.

   Karakteristični polinom enačbe $K(x) = x^2 - 2x - 2$ ima ničli $1 + \sqrt{3}$ in $1 - \sqrt{3}$. Zato je splošna rešitev homogene enačbe enaka

$$a_n = A \cdot (1 + \sqrt{3})^n + B \cdot (1 - \sqrt{3})^n \,.$$

   Konstanti A in B izračunamo iz začetnih pogojev:

$$\begin{aligned} a_1 &= A \cdot (1 + \sqrt{3})^1 + B \cdot ((1 - \sqrt{3}))^1 = 3 \\ a_2 &= A \cdot (1 + \sqrt{3})^2 + B \cdot (1 - \sqrt{3})^2 = 8. \end{aligned}$$

   Dobimo $A = (3 + 2\sqrt{3})/6$ in $B = (3 - 2\sqrt{3})/6$. Rešitev gornje rekurzivne enačbe je torej enaka

$$a_n = (3 + 2\sqrt{3})/6 \cdot (1 + \sqrt{3})^n + (3 - 2\sqrt{3})/6 \cdot (1 - \sqrt{3})^n \,.$$

1. kolokvij, 18. november 2009

1. (a) Od 20 mest so 4 mesta določena. Na preostalih 16 mest lahko damo 0 ali 1. Po pravilu produkta dobimo 2^{16} ustreznih zaporedij.

   (b) Prvi dve mesti sta določeni, za zadnji dve mesti imamo 3 možnosti: 00,10 in 11. Na preostalih 16 mest lahko damo 0 ali 1. Po pravilu produkta dobimo $3 \cdot 2^{16}$ ustreznih zaporedij.

   Nalogo lahko rešimo tudi z naslednjim razmislekom. Imamo 2^{18} zaporedij dolžine 20, ki se začnejo z 10. Od tega moramo odšteti zaporedja, ki se končajo z 01. Torej je $2^{18} - 2^{16}$ ustreznih zaporedij.

   (c) Zaporedij dolžine 20, ki se začnejo z 10, je 2^{18}, zaporedij, ki se končajo z 01 je 2^{18}. Zaporedja ki se začnejo z 10 in končajo z 01, smo šteli dvakrat. Ustreznih zaporedij je torej $2 \cdot 2^{18} - 2^{16}$.

2. Izmed 4 barv lahko izberemo 2 barvi na $\binom{4}{2}$ načinov, 3 karte izmed 13 kart enake barve pa izberemo na $\binom{13}{3}$ načinov. Po pravilu produkta lahko torej izvlečemo 6 kart (3 ene barve, 3 druge barve) na $\binom{4}{2}\binom{13}{3}\binom{13}{3}$ načinov.

3. (a) $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, torej je produkt petih rezličnih praštevil. Dva faktorja lahko sestavimo na dva načina: prvi faktor je praštevilo, drugi produkt 4 praštevil ali prvi faktor je produkt dveh praštevil, drugi faktor je produkt 3 praštevil. Skupaj j torej $\binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 15$ načinov.

   Lahko seštevamo tudi takole: $\frac{\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}}{2} = 15$ načinov. Ker vrstni red faktorjev ni pomemben, smo delili z dva.

   Lahko sklepamo tudi takole: 2310 ima $2^5 = 32$ deliteljev. Vsak par deliteljev $2310 = a \cdot b$ nam da en razcep na dva faktorja. Odšteti moramo še neustrezen razcep $2310 = 1 \cdot 2310$. Skupaj imamo torej $\frac{2^5}{2} - 1 = 15$ načinov.

   Lahko sklepamo tudi takole: imamo dva faktorja - celici, ki sta neoznačeni in ne smeta biti prazni. Različna praštevila so elementi, ki jih razlikujemo. Torej je $S(5, 2) = 15$ različnih načinov.

(b) Vse razmisleke iz točke (a) lahko enostavno posplošimo iz 5 na n praštevil. Previdni moramo biti le pri prvem razmisleku, če je n sodo število. V tem primeru imamo

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{(n-2)/2} + \binom{n}{n/2} \cdot \frac{1}{2}$$

načinov, saj vsako možnost pri zadnjem sumandu štejemo dvakrat.

4. Največja možna vsota desetih različnih dvomestnih števil je $90+91+\cdots+99 = 945$; več kot toliko različnih vsot torej ne moremo narediti iz največ 10 dvomestnih števil.

   Vseh različnih nepraznih podmnožic množice z 10 elementi je $2^{10} - 1 = 1023$.

   Ker je podmnožic več kot možnih vsot, morata po Dirichletovem principu vsaj dve imeti enako vsoto (celice: vsote, elementi: neprazne podmnožice množice A; elementov je več kot celic).

   Dobljeni množici nista nujno disjunktni. V tem primeru odstranimo skupne elemente. Ker sta bili množici različni, sta novi množici neprazni in disjunktni, še vedno pa imata isto vsoto.

2. kolokvij, 13. januar 2010

1. Naj bo G dvodelen graf. Potem lahko množico njegovih točk razbijemo na dve podmnožici V_1 in V_2 na tak način, da ima vsaka povezava eno krajišče v V_1 in drugo v V_2.

   Točke iz V_1 imajo lahko stopnjo največ $|V_2|$, točke iz V_2 pa največ $|V_1|$. Velja torej

   $$\delta(G) \leq \min\{|V_1|, |V_2|\} \quad \text{in} \quad \Delta(G) \leq \max\{|V_1|, |V_2|\}.$$

   Torej

   $$\delta(G) + \Delta(G) \leq |V_1| + |V_2| = |V(G)|.$$

   Za dvodelen graf G torej vedno velja $\delta(G) + \Delta(G) \leq |V(G)|$. Zato ne obstaja dvodelen graf G za katerega velja $\delta(G) + \Delta(G) > |V(G)|$.

2. Poglejmo po vrsti, kakšne lastnosti ima graf G:

   - regularen: ni, ker nimaje vse točke iste stopnje (npr. točka 1 ima stopnjo 3, točka 8 ima stopnjo 4);
   - dvodelen: ni, ker vsebuje cikle lihe dolžine, na primer trikotnik $1, 5, 6, 1$;
   - Eulerjev: ni, ker nimajo vse točke sode stopnje.
   - Hamiltonov: je, ker ima Hamiltonov cikel, na primer $1, 8, 7, 6, 2, 3, 4, 5, 1$;

- ravninski: je, ker ga lahko narišemo v ravnino, ne da bi se povezave sekale. Za dokaz je potem treba graf res tako narisati. Na primer, če pustimo točke $1, 8, 7, 6$ na svojih mestih in zasukamo cikel 2,3,4,5 (zamenjamo 2 in 5 ter 3 in 4), grafa ni težko dopolniti do ravninske risbe;
- najmanjše število potez, da ga narišemo: ker ima 4 točke lihe stopnje, potrebujemo $4/2 = 2$ potezi.

Komentarji:

- Utemeljitev, da graf ni dvodelen, ker vsebuje cikle lihe dolžine, ne zadošča. Navsezadnje lahko tak stavek vedno napišeš in upaš, da je res. Treba je najti vsaj en cikel lihe dolžine.
- Za utemeljitev dvodelnosti z barvanjem (razdelitvijo množice točk na dve podmnožici) je treba barvati na pravi način, ne kar poljubno. Najprej pobarvamo eno točko, nato sosede z drugo barvo, sosede sosedov spet s prvo barvo.... Na gornjem grafu na primer pobarvamo točko 1 z barvo 1, njene sosede $8, 5, 6$ z barvo 2 in že ugotovimo, da se barvenje ne izide, ker sta točki 5 in 6 barve 2 sosednji. Graf torej ni dvodelen.
- Nekateri ste v grafu našli podgraf, skrčljiv na $K_{3,3}$ ali K_5. Pri tem ste verjetno naredili eno od treh napak:
  – niste opazili, da je kakšna povezava premalo;
  – "skčili" ste povezavo $\{1, 2\}$, ki je seveda ni;
  – kakšno "pomožno" točko ste uporabili za dve povezavi.

3. Problem predstavimo kot problem iz teorije grafov takole: točke grafa so udaleženci tekmovanja (kandidati), dve točki sta povezani, če se ustrezna udeleženca pomerita. Ker vsak udeleženec odigra štiri tekme, iščemo graf na 10 točkah, kjer ima vsaka točka stopnjo štiri.

   Trojica, v kateri igra vsak igralec z vsakim, predstavlja trikotnik v grafu.

   Ker obstaja 4-regularen graf na 10 točkah brez trikotnikov, je odgovor na obe vprašanji pritrdilen (lahko sicer za odgovor na točko (a) konstruiramo drug graf, ni pa potrebno).

   Primer takega grafa je dvodelen graf (zagotovo nima trikotnikov!), ki ga dobimo iz $K_{5,5}$ tako, da v vsaki točki odstranimo eno povezavo.

   Komentar: za odgovor pri nalogi (a) je treba sestaviti ustrezen graf. Odgovor, da graf obstaja, ker ima sodo število točk sode stopnje ne zadošča; na primer, če so stopnje točk 8,8,8,2,2,2,2,2,2,2, imamo sodo število točk sode stopnje, pa graf vseeno ne obstaja.

4. Karakteristični polinom enačbe je $K(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = (x-3)^2(x-1)$. Ničli sta 3 (2. stopnje) in 1 (1. stopnje). Zato je splošna rešitev enačbe enaka

$$a_n = (A + B \cdot n)3^n + C \cdot 1^n\,.$$

Konstante A, B in C izračunamo iz začetnih pogojev:

$$\begin{aligned} a_0 &= (A + B \cdot 0)3^0 + C = A + C = 0 \\ a_1 &= (A + B \cdot 1)3^1 + C = 3A + 3B + C = 4 \\ a_2 &= (A + B \cdot 2)3^2 + C = 9A + 18B + C = 28. \end{aligned}$$

Rešimo sistem treh enačb s tremi neznankami in dobimo $A = -1$, $B = 2$ in $C = 1$. Rešitev gornje rekurzivne enačbe je torej

$$a_n = (-1 + 2n)3^n + 1\,.$$

1. izpit, 9. februar 2010

1. (a) Če števila -5 ne izberemo, lahko 4 števila izberemo na $2^4 = 16$ načinov - za vsako izmed 4 pozitivnih vrednosti se odločimo, ali zanjo izberemo pozitivni ali negativni predznak. Če izberemo število -5, izmed ostalih štirih pozitivnih vrednosti izberemo tri, za vsako pa izberemo še enega od dveh predznakov. To lahko storimo na $\binom{4}{3} \cdot 2^3 = 32$ načinov. Skupaj imamo torej $16 + 32 = 48$ različnih načinov za izbiro štirih števil, ki so različna po absolutni vrednosti.

   (b) Od vseh načinov izbire 4 števil odštejmo tiste, pri katerih se eno število pojavi štirikrat. Izmed 9 števil lahko izberemo 4 s ponavljanjem na $\binom{9+4-1}{4} = \binom{12}{4} = 495$ načinov. Zraven smo šteli tudi 9 izbir, pri katerih štirikrat izberemo isto število. Ustreznih izbir je torej $495 - 9 = 486$.

   (c) Da bo produkt negativen, moramo izbrati liho število negativnih faktorjev. Eno negativno in tri pozitivna števila lahko izberemo na $\binom{5}{1}\binom{4}{3} = 20$ načinov. Tri negativna in eno pozitivno števila lahko izberemo na $\binom{5}{3}\binom{4}{1} = 40$ načinov. Skupaj imamo torej $20 + 40 = 60$ ustreznih načinov.

2. Da pridemo od točke $(1, 2)$ do točke $(5, 9)$, moramo narediti 4 korake v desno in 7 korakov navzgor. Takšnih poti je natanko toliko, kot permutacij s ponavljanji 4 črk D in 7 črk N, le teh pa je $\binom{11}{4,7} = \frac{11!}{4!\,7!} = 330$.

   Poti, ki vsebujejo del poti $(2, 2) - (3, 2) - (4, 2) - (4, 3)$ je 7, saj od točke $(1, 2)$ lahko pridemo do točke $(2, 2)$ samo na 1 način, od točke $(4, 3)$ pa lahko pridemo do točke $(5, 9)$ na $\binom{7}{1,6} = \frac{7!}{1!\,6!} = 7$ načinov (enkrat gremo desno in šestkrat navzgor). Poti, ki te podpoti ne vsebujejo je torej $330 - 7 = 323$.

3. Vsi trije grafi imajo enako število točk in enako število povezav. Tudi stopnje točk se ujemajo: po 4 točke imajo stopnjo 4 in po 4 točke imajo stopnjo 3. Opazimo pa, da so točke stopnje 4 v grafih G_2 in G_3 povezane med sabo (podgraf iz točk stopnje 4 je cikel dolžine 4 z eno diagonalo), v grafu G_1 pa sta povezani samo po dve točki stopnje 4. Torej graf G_1 ni izomorfen nobenemu od grafov G_2 in G_3.

   Izomorfizem med grafoma G_2 in G_3 najlažje najdemo, če opazimo, da sta sliki grafov enaki, ko graf G_3 zasukamo za 90 stopinj v smeri urinega kazalca. Bijektivna preslikavami med točkami grafov je podana v spodnji tabeli.

G_2	a	b	c	d	e	f	g	h
G_3	B	C	D	A	F	G	H	E

Ker sta grafa po zasuku G_3 za 90 stopinj tudi enako narisana, se povezave v G_2 očitno preslikajo v povezave v G_3.

4. Naj bo G enostaven povezan ravninski graf, narisan v ravnini tako, da ima 53 lic, vsako od lic pa ima na robu vsaj 5 povezav. Označimo z n število točk, z m število povezav in s f število lic grafa G. Ker ima vsako lice na robu 5 povezav, velja $2m \geq 5f$. Eulerjeva formula nam da enačbo

$$n - m + f = 2.$$

Enačbo pomnožimo z dva, upoštevamo upovezavo med številom lic in povezav, vstavimo število lic in dobimo

$$2n = 4 + 2m - 2f \geq 4 + 5f - 2f = 4 + 3f = 4 + 3 \cdot 53 = 163.$$

Velja torej $n \geq 81.5$. Ker je n celo število, mora torej veljati $n \geq 82$.

Graf G ima vsaj 82 točk.

2. izpit, 17. februar 2010

1. Iz kompleta 52 kart izberemo 13 kart (vrstni red ni pomemben).

   (a) Ker je samo 13 različnih vrednosti, moramo za vsako izmed vrednosti izbrati samo še eno izmed štirih barv. To lahko naredimo na 4^{13} načinov.

   (b) Če ne smemo izbrati nobenega asa, izbiramo 13 kart izmed 48 kart, kar lahko storimo na $\binom{48}{13}$ načinov.

   (c) Za izbiro natanko 10 kart iste barve sklepamo takole: najprej izberemo eno imed štirih barv (na 4 načine), nato izmed 13 kart te barve izberemo 10 kart, kar lahko storimo na $\binom{13}{10}$ načinov. Sedaj je treba izbrati še tri karte izmed 39 kart preostalih barv, kar lahko storimo na $\binom{39}{3}$ načinov. Skupaj je torej $4 \cdot \binom{13}{10}\binom{39}{3}$ ustreznih izbir.

   (d) Sklepamo podobno kot v prejšnji točki, izberemo pa lahko 10, 11, 12 ali 13 kart iste barve. Imamo torej

$$4 \cdot \left(\binom{13}{10}\binom{39}{3} + \binom{13}{11}\binom{39}{2} + \binom{13}{12}\binom{39}{1} + \binom{13}{13}\binom{39}{0} \right) = 10688240$$

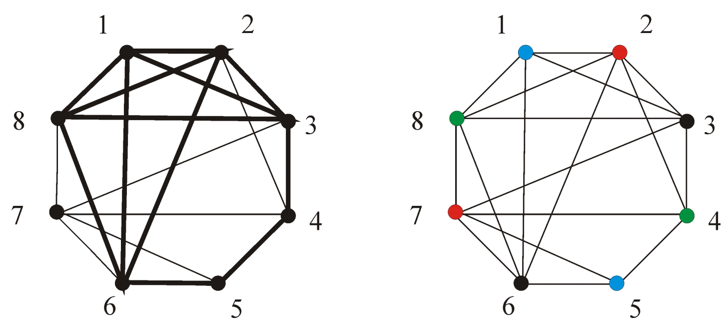
   ustreznih načinov.

   Opozorilo: rešitev, kjer najprej izberemo barvo in 10 kart te barve, nato pa še tri karte izmed vseh preostalih kart ni pravilna, saj nekatere možnosti štejemo večkrat! Preverimo: $4 \cdot \binom{13}{10}\binom{44}{3} = 15151136 \neq 10688240$.

2. Iz črk besede SLOVENIJA lahko sestavimo besedo dolžine 9 na 9! načinov, saj so vse črke različne. Če nobena dva samoglasnika ne smeta biti sosednja, sklepamo takole. Samoglasnike lahko uredimo na 4! načinov. Sedaj izberimo mesta, kamor bomo postavili soglasnike. Med vsaka dva samoglasnika moramo vriniti vsaj en soglasnik - zato porabimo 3 soglasnike. Ostaneta še dva soglasnika, ki lahko nastopata kjerkoli med samoglasniki in na začetku ali koncu besede. Dva elementa (soglasnika), ki ju ne razlikujemo, moramo razporediti v pet škatel (mesta za postavitev soglasnikov), ki jih razlikujemo in so lahko tudi prazne. To lahko storimo na $\binom{2+5-1}{2} = \binom{6}{2}$ načinov. Sedaj smo šele izbrali mesta, kjer bodo soglasniki. Na ta mesta pa lahko soglasnike razvrstimo na 5! načinov - vse možne permutacije petih elementov. Skupaj je torej $4!\binom{6}{2}5!$ ustreznih besed.

3. Poglejmo po vrsti, kakšne lastnosti ima graf G:

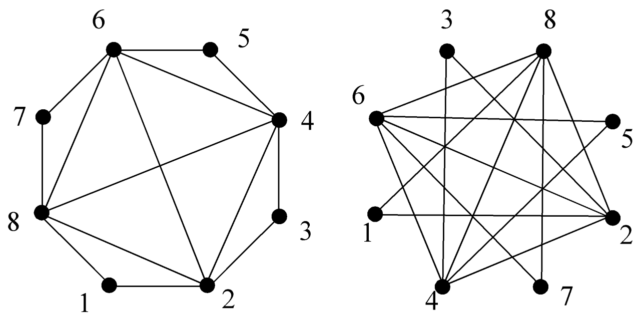
   - regularen: ni, ker nimaje vse točke iste stopnje (npr. točka 1 ima stopnjo 4, točka 2 ima stopnjo 5);
   - Eulerjev: ni, ker nimajo vse točke sode stopnje (liho stopnjo imajo točke 2, 3, 5, 6, 7 in 8);
   - ravninski: ni, ker vsebuje subdivizijo grafa K_5, na spodnji sliki levo so njene povezeve prikazane z odebeljenimi črtami.
   - Barvnost grafa je enaka 4. Potrebujemo najmanj 4 barve, ker graf vsebuje podgraf, izomorfen K_4, sestavljen iz točk 1,2,3 in 8. Graf lahko pobarvamo s 4 barvami, glej spodnjo sliko desno. Barvnost grafa je torej enaka 4.



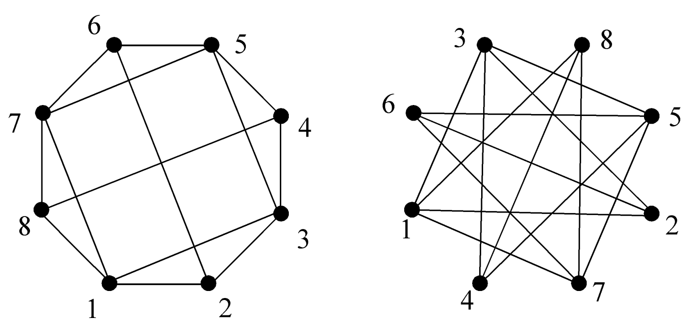
4. Na vajah smo pokazali, da je graf lahko izomorfen svojemu komplementu le v primeru, da je ostanek pri deljenju števila točk s 4 enak 0 ali 1. Za graf na 8 točkah je torej mogoče, da je izomorfnen svojemu komplementu.

   Najprej ugotovimo, kolikšne morajo biti stopnje točk v grafu, da bo lahko izomorfen svojem komplementu. V grafu, ki ima Hamiltonov cikel, ima vsaka točka stopnjo vsaj 2. V komplementu bo točka stopnje 2 imela stopnjo 5. Torej moramo imeti v grafu toliko točk stopnje 5 kot imamo točk stopnje 2. Podobno moramo imeti toliko točk stopnje 3 kot točk stopnje 4. Točk stopnje 6 ali 7 ne moremo imeti, sicer komplement nima Hamiltonovega cikla, saj ima točke stopnje 1 oziroma 0.

Sedaj poskusimo konstruirati ustrezen graf: najprej narišemo cikel dolžine 8 in dodamo nekaj povezav tako, da bodo točke imele ustrezne stopnje. Poskusimo sestaviti graf s 4 točkami stopnje 2 in 4 točkami stopnje 5, glej spodnjo sliko, levo. Sedaj narišemo še njegov komplement in preverimo, da sta grafa izomorfna. Izomorfizem je podan z oštevilčenjem točk: točka na levi se preslika v točko na desni z isto oznako. Ni težko preveriti, da se tudi povezave preslikajo v povezave - najprej preverimo, da ima tudi drugi graf Hamiltonov cikel $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1$ in nato preverimo še, da ima drugi graf preostale povezave $(2:4)$, $(2:6)$, $(2:8)$, $(4:6)$, $(4:8)$ in $(6:8)$.



Lahko sestavimo tudi graf, ki ima 4 točke stopnje 3 in 4 točke stopnje 4, glej spodnjo sliko levo. Podobno kot v prejšnjem primeru še preverimo, da je res izomorfen svojemu komplementu.



3. izpit, 16. september 2010

1. Beseda MATEMATIK vsebuje 6 različnih črk; M, A in T se pojavijo po dvakrat.

   (a) Če ni dodatnih omejitev, lahko iz črk besede MATEMATIK sestavimo $\binom{9}{2,2,2} = \frac{9!}{2!\,2!\,2!}$ različnih besed, kolikor je permutacij s ponavljanji dolžine 9, pri katerih se 3 črke pojavijo po dvakrat.

   (b) Če se oba M-ja pojavita zaporedoma, ju lahko štejemo za eno (dvojno) črko. Tako štejemo vse besede dolžine 8, pri katerih se dve črki pojavita po dvakrat. Le-teh pa je $\binom{8}{2,2} = \frac{8!}{2!\,2!}$

(c) Uporabimo pravilo vključitev in izključitev. Od vseh besed odštejemo tiste, kjer se po dve enaki črki pojavita skupaj. Potem pa je treba prišteti tiste besede, kjer se dvakrat po dve črki pojavita skupaj in zopet odšteti tiste besede, kjer se pojavijo vse tri črke po dvakrat. Dobimo

$$\frac{9!}{2!\,2!\,2!} - \binom{3}{1}\frac{8!}{2!\,2!} + \binom{3}{2}\frac{7!}{2!} - 6!$$

ustreznih besed.

2. Najprej rešimo homogeno enačbo. Karakteristični polinom enačbe $K(x) = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ ima eno dvojno ničlo, $x = -3$. Zato je splošna rešitev homogene enačbe enaka

$$a_n = (A + B\,n) \cdot (-3)^n.$$

Sedaj potrebujemo še posebno rešitev. Za člen 2^n vzamemo nastavek $a_n = C \cdot 2^n$; upoštevamo, da 2 ni ničla karakterističnega polinoma. Nastavek vstavimo v rekurzivno enačbo in dobimo $C \cdot 2^{n+2} + 6C \cdot 2^{n+1} + 9C \cdot 2^n = 2^n$. Od tod izračunamo $C = 1/25$.

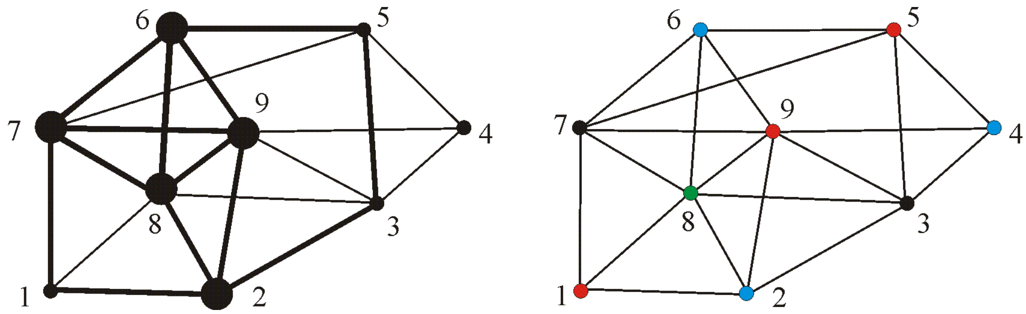
Za člen n, ki je polinom prve stopnje, vzamemo nastavek $a_n = Dn + E$; upoštevamo, da 1 ni ničla karakterističnega polinoma. Nastavek vstavimo v rekurzivno enačbo in dobimo enačbo $D(n+2) + E + 6D(n+1) + 6E + 9Dn + 9E = n$. S primerjavo koeficientov pri n in prostem členu dobimo enačbi $D + 6D + 9D = 1$ in $2D + E + 6D + 6E + 9E = 0$, od koder izračunamo $D = 1/16$ in $E = -1/32$. Splošna rešitev rekurzivne enačbe je torej enaka

$$a_n = (A + B\,n) \cdot (-3)^n + \frac{1}{16}n - \frac{1}{32}.$$

3. Poglejmo po vrsti, kakšne lastnosti ima dani graf:

- regularen: ni, saj nimajo vse točke iste stopnje (na primer, točka 1 ima stopnjo 3, točka 2 pa ima stopnjo 4);
- dvodelen: ni, ker vsebuje cikle lihe dolžine, na primer trikotnik $1, 2, 8, 1$;
- Eulerjev: ni, ker nimajo vse točke sode stopnje (liho stopnjo imajo kar 4 točke, to so $1, 3, 4$ in 7);
- ravninski: ni, ker vsebuje subdivizijo grafa K_5, njene povezave so prikazane z odebeljenimi črtami na spodnji sliki levo.
- Barvnost grafa je enaka 4. Potrebujemo najmanj 4 barve, ker graf vsebuje kliko velikosti 4 (sestavljajo jo točke $6, 7, 8$ in 9). Graf lahko pobarvamo s 4 barvami, glej spodnjo sliko na desni. Barvnost grafa je torej enaka 4.

4. Naj bo G graf na 6 točkah.



(a) Če ni nobenih dodatnih omejitev ima lahko najmanj 0 in največ $\binom{6}{2} = 15$ povezav.

(b) Če je G povezan, mora imeti vsaj 5 povezav (drevo), največ pa jih ima lahko 15.

(c) Če G ni povezan, ima lahko najmanj 0 povezav, največ pa jih ima, če ima dve komponenti, od katerih je ena izomorfna K_5, druga pa K_1. V tem primeru imamo $\binom{5}{2} = 10$ povezav. Pri vseh drugih razdelitvah imamo manj povezav (2+4 točke: največ 7 povezav, 3+3 točke: največ 6 povezav).

1. kolokvij, 24. november 2010

1. Izbrati moramo začetno in končno postajo. To lahko storimo na $k \cdot (k-1)$ načinov. Imamo torej $k \cdot (k-1)$ različnih vozovnic.

   Za število vozovnic, kjer se vsak potnik pelje vsaj dve postaji, od vseh vozovnic odštejemo tiste za eno postajo. Teh pa je $2 \cdot (k-1)$, saj lahko za vsako smer na $k-1$ načinov izberemo začetno postajo, končna pa je s tem že določena. Imamo torej $k \cdot (k-1) - 2 \cdot (k-1)$ ustreznih vozovnic.

2. (a) Ločimo primera, ko je enica na prvem mestu in ko ni. Če je enica na prvem mestu, je potem na preostalih $n-1$ mestih lahko katera koli od preostalih devetih števk. Takih možnosti je torej 9^{n-1}. Če enica ni na prvem mestu, potem je na prvem mestu ena od preostalih števk razen ničle, torej 8 možnosti. Izmed preostalih $n-1$ mest moramo izbrati eno mesto, na katerem je enica. To lahko naredimo na $n-1$ načinov. Na preostalih $n-2$ mestih se lahko pojavijo vse števke razen 1. Takih možnosti je torej $8(n-1) \cdot 9^{n-2}$. Skupaj imamo torej $9^{n-1} + 8(n-1) \cdot 9^{n-2}$ desetiških številk, ki vsebujejo natanko eno enko.

   (b) Ločimo primera, ko je enica na prvem mestu in ko ni. Če je enica na prvem mestu, potem sme biti na preostalih mestih le še ena enica. Teh mest je $n-1$ kar je ravno število možnosti za postavitev enice. Na preostalih $n-2$ mestih je lahko katera koli od preostalih devetih števk. Takih možnosti je torej $(n-1)9^{n-2}$. Če enica ni na prvem mestu, potem je na prvem mestu ena od preostalih števk razen ničle, torej 8 možnosti. Izmed preostalih $n-1$ mest moramo izbrati dve mesti, na katerih sta enici. To lahko naredimo na $\binom{n-1}{2}$ načinov. Na preostalih $n-3$ mestih se lahko pojavijo vse števke razen 1. Takih možnosti je torej $8\binom{n-1}{2}9^{n-3}$. Skupaj je vseh možnosti $(n-1)9^{n-2}+8\binom{n-1}{2}9^{n-3}$.

(c) Izračunamo število vseh n-mestnih števil in odštejemo tista z nič in z eno enico. Vseh števil je $9\cdot 10^{n-1}$, saj na prvem mestu ne sme biti ničle, na ostalih mestih pa so lahko vse števke. Števil brez enice je $8\cdot 9^{n-1}$. Števil z eno enico pa smo izračunali v točki (a): $9^{n-1}+8(n-1)\cdot 9^{n-2}$.

3. Ker so številke majhne, lahko nalogo rešimo tudi z naštetjem vseh možnosti. Tukaj bomo predstavili rešetev z uporabo porazdelitev. Celice so barve - so označene in so lahko prazne. Elementi so žoge - jih ne razlikujemo (barva žoge je določena z izbiro celice).

(a) Celice so 3, elementi so 4, ustreznih porazdelitev je

$$\binom{4+3-1}{4}=\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=15.$$

(b) Naj bo A_1 množica takih razporeditev žog, da je v rdeči škatli vsaj 6 žog, A_2 množica takih razporeditev žog, da je v modri škatli vsaj 6 žog in A_3 množica takih razporeditev žog, da je v zeleni škatli vsaj 11 žog. Označimo z U množico vseh razporeditev žog. Iščemo torej $|U|-|A_1\cup A_2\cup A_3|$.

Za izračun moči unije bomo uporabili formulo vključitev in izključitev. Najprej izračunajmo moči presekov:

$$\begin{aligned}
|U| &= \binom{12+3-1}{12}=\binom{14}{12}=\binom{14}{2}=91\\
|A_1|=|A_2| &= \binom{6+3-1}{6}=\binom{8}{6}=\binom{8}{2}=28\\
|A_3| &= \binom{1+3-1}{1}=\binom{3}{1}=3\\
|A_1\cap A_2| &= 1\\
|A_1\cap A_3| &= |A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_2\cap A_3|=0\,.
\end{aligned}$$

Za izračun moči množice A_1 si predstavljamo, da najprej v rdečo škatlo damo 6 žog in potem delimo samo še 6 žog. Za izračun moči množice A_2 si predstavljamo, da najprej v modro škatlo damo 6 žog in potem delimo samo še 6 žog... Načinov za izbiro 12 žog je torej

$$91-28-28-3+1=33.$$

4. Da bo produkt $(p_1-1)(p_2-2)\ldots(p_n-n)$s odo število, mora biti vsaj eden izmed faktorjev sod. To pa pomeni, da morata biti oba člena v faktorju iste parnosti -

oba soda ali oba liha. Med števili $1, 2, \ldots, n$ je $(n-1)/2$ sodih števil in $(n+1)/2$ lihih števil, saj je n liho. Lihih števil je torej več kot sodih. Enako velja za števila $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Zato se ne more zgoditi, da bi bila v vsakem faktorju člena različne parnosti - vsaj en faktor je takšen, da sta oba člena liha. Potem pa je njuna razlika soda in je tudi celoten produkt sod.

2. kolokvij, 12. januar 2011

1. Problem predstavimo kot problem iz teorije grafov takole: točke grafa G so ljudje, dve točki sta povezani, če se ustrezna človeka ne poznata. Sedežni red je potem Hamiltonov cikel v grafu G.

   Graf ima 10 točk. Ker vsak človek pozna natanko tri ljudi, ne pozna šestih ljudi. Vsaka točka v grafu ima torej stopnjo 6. Ker je stopnja vsake točke enaka 6 in $6 \geq 5 = 10/2$, ima po Diracovem izreku graf G Hamiltonov cikel. Ustrezni sedežni red torej obstaja.

   Nalogo lahko rešimo tudi tako, da dve točki povežemo, če se ustrezna človeka poznata. V tem primeru iščemo Hamiltonov cikel v komplementu grafa.

2. Vsak od grafov ima dve točki lihe stopnje. Torej ima Eulerjev sprehod, ne pa obhoda. Graf ima Eulerjev obhod samo, če imajo vse njegove točke sodo stopnjo. Potrebujemo eno potezo - število točk lihe stopnje delimo z 2.

   Graf A ni Hamiltonov po razpadnem kriteriju: če odstranimo točko 2, graf razpade na 2 komponenti. Dvodelen ni, saj ima cikel lihe dolžine $2, 5, 9, 2$.

   Graf C je dvodelen, saj lahko njegove točke razdelimo na množici $V_1 = \{1, 2, 7, 8, 9\}$ in $V_1 = \{3, 4, 5, 6\}$ tako, da ima vsaka povezava eno krajišče v množici V_1, drugo pa v množici V_2. Hamiltonov ni, saj je dvodelen in imata množici iz dvodelnega razbitja različno moč, $|V_1| \neq |V_2|$.

   Graf B ni Hamiltonov po razpadnem kriteriju: če odstranimo točki 4 in 7, graf razpade na 3 komponente. Dvodelen ni, saj ima cikel lihe dolžine, na primer $1, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 1$.

   Graf D ni Hamiltonov po razpadnem kriteriju: če odstranimo točko 3, graf razpade na 2 komponenti. Dvodelen ni, saj ima cikel lihe dolžine $4, 5, 6, 4$.

3. Graf C je dvodelen, zato ni izomorfen nobenemu od grafov A, B, D. Grafa A in D imata trikotnik, graf B pa ne. Torej graf B ni izomorfen nobenemu od grafov A in D.

   Grafa A in D sta izomorfna. To najlažje preverimo tako, da graf A lepše narišemo - da izgleda enako kot graf D in potem preslikamo točke grafa A v istoležne točke grafa D. Oba grafa sta sestavljena iz trikotnika, šestkotnika in mostu med njima. Most preslikamo v most, trikotnik v trikotnik in šestkotnik v šestkotnik. Primer izomorfizma je podan v spodnji tabeli (jih je več, saj lahko trikotnika in šestkotnika zasukamo). Izomorfizem podamo s permutacijo točk:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 5 & 3 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Sedaj je potrebno preveriti še, da se povezave preslikajo povezave. Če sta grafa enako narisana, je to očitno. Sicer za vsako povezavo posebej to preverimo.

4. Označimo z a_n število nizov dolžine n iz znakov $0, 1, 2, 3$, pri katerih se 3 nikoli ne pojavi za 0. Najprej poiščimo rekurzivno enačbo, ki ji zadošča zaporedje (a_n). Vsak niz dolžine $n-1$ lahko nadaljujemo z 0, 1 ali 2. Nizov dolžine n, pri katerih se 3 ne pojavi za 0 in se končajo z 0, 1 ali 2 je torej $3a_{n-1}$. Če se niz dolžine n konča s 3, na nobenem od prejšnjih $n-1$ mest ne sme biti ničle. Vsi drugi nizi so ustrezni. Imamo torej 3^{n-1} nizov dolžine n, pri katerih se 3 ne pojavi za 0 in se končajo s 3. Velja torej zveza

$$a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1}$$

oziroma

$$a_{n+1} - 3a_n = 3^n.$$

Ker je rekurzivna enačba prvega reda, potrebujemo še en začetni člen, $a_1 = 4$, saj so vsi nizi dolžine 1 ustrezni.

Najprej rešimo homogeno enačbo. Karakteristični polinom enačbe $K(x) = x - 3$ ima eno ničlo 1. stopnje, $x = 3$. Zato je splošna rešitev homogene enačbe enaka

$$a_n = A \cdot 3^n.$$

Sedaj potrebujemo še posebno rešitev, ki jo izračunamo z nastavkom $a_n = B \cdot n \cdot 3^n$. Ker je 3 ničla karakterističnega polinoma, je bilo potrebno dodati faktor n. Nastavek vstavimo v rekurzivno enačbo in dobimo $B = 1/3$. Splošna rešitev rekurzivne enačbe je torej enaka

$$a_n = A \cdot 3^n + \frac{1}{3} n\, 3^n.$$

Konstanto A izračunamo iz začetnega pogoja: $a_1 = 4 = 3A + 3$, torej je $A = 1$. Rešitev enačbe je torej

$$a_n = 3^n + \frac{1}{3} n\, 3^n.$$

1. izpit, 3. februar 2011

1. Lihih števk je 5, sodih števk je 5 in šestmestno število ima šest mest, a se ne sme začeti z 0. Obravnavamo dve možnosti: na prvem mestu je soda števka ali na prvem mestu je liha števka. V vsakem od primerov pa imamo lahko 1, 3 ali 5 lihih števk.

   Če je na prvem mestu liha števka, jo lahko izberemo na 5 načinov. Če imamo samo eno liho števko, je ostalih pet števk sodih in jih lahko izberemo na 5^5 načinov. Če imamo tri lihe števke, je ena že na prvem mestu, izbrati pa moramo še dve izmed petih mest za preostali dve. Za pet lihih števk moramo izbrati štiri mesta izmed preostalih 5. Za vsako izmed petih mest pa imamo še 5 možnih vrednosti. Skupaj imamo torej

$$5 \cdot \left(1 + \binom{5}{2} + \binom{5}{4}\right) \cdot 5^5 = 16 \cdot 5^6 = 250000$$

števil, ki se začnejo z liho števko.

Podobno sklepamo, če je na prvem mestu soda števka, le da v tem primeru ne smemo izbrati ničle za prvo mesto, na preostala mesta pa postavimo po 1, 3 ali 5 lihih števk. Imamo torej

$$4 \cdot \left(\binom{5}{1} + \binom{5}{3} + \binom{5}{5}\right) \cdot 5^5 = 4 \cdot 16 \cdot 5^5 = 200000$$

števil, ki se začnejo s sodo števko. Skupaj imamo torej $250000 + 200000 = 450000$ ustreznih števil.

Do rešitve vodi tudi bližnjica. Vseh šestmestnih števil je $9 \cdot 10^5 = 900000$, ker na prvem mestu ne sme biti ničle, na preostalih mestih pa lahko nastopi katerakoli od destih števk. Števil z lihim številom lihih števk je ravno toliko kot tistih s sodim številom lihih števk.

To pokažemo tako, da poiščemo bijekcijo med njimi. Na primer, če na zadnjem mestu zamenjamo 0 z 1, 1 z 2, 2 s 3,..., 8 z 9 in 9 z 0, smo številu z lihim številom števk priredili število s sodim številom števk. Obratna preslikava preslika števila s sodim številom lihih števk v števila z lihim številom lihih števk. Preslikavi sta očitno bijekciji. Torej je vseh šestmestnih števil z lihim številom lihih števk enako $900000/2 = 450000$.

2. Nalogo rešujemo z nekoliko prirejenim Dirichletovim načelom: kvadrat bi radi razdelili na več kot 4049 celic, da bi vsaj ena celica ostala prazna - le ta bi ustrezala pravokotniku velikosti 10×20, ki ima prazen presek z vsakim izmed žetonov.

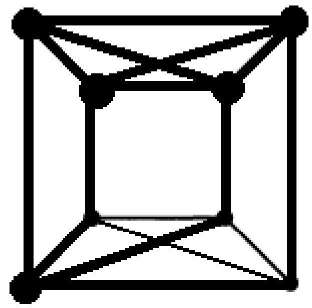
   Če za celice vzamemo kar mrežo pravokotnikov velikosti 10×20, ki se dotikajo, dobimo sicer $50 \cdot 100 = 5000$ celic, a en žeton se lahko seka kar s štirimi celicami naenkrat in gornje ideje ne moremo uporabiti. Celice moramo izbrati tako, da se en žeton ne more dotikati dveh celic naenkrat.

   Na primer, za celice izberemo pravokotnike velikosti 10×20, ki se ne dotikajo, razdalja med njimi pa je več kot 1, na primer 1.1. Takšnih pravokotnikov lahko v kvadrat s stranico 1000 postavimo vsaj

$$\left\lfloor \frac{1000}{11.1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{1000}{21.1} \right\rfloor = 90 \cdot 47 = 4230.$$

   Vsak žeton je v največ eni celici, zato vsaj ena celica ostane prazna. Torej imamo pravokotnik velikosti 10×20, ki ima prazen presek z vsakim izmed žetonov.

3. Graf G ni ravninski, saj vsebuje subdivizijo grafa K_5. Sestavljajo jo na primer gornje 4 točke in ena od spodnjih, glej sliko, kjer so točke in povezave subdivizije K_5 odebeljene. (V grafu G lahko najdemo tudi subdivizijo grafa $K_{3,3}$).



Graf G ni samokomplementaren. Vse njegove točke imajo stopnjo 4, točke v $\overline{G}$ pa imajo stopnjo $8-1-4=3$. Torej G in $\overline{G}$ ne moreta biti izomorfna.

Ker graf G vsebuje kliko velikosti 4 (sestavljajo jo na primer gornje 4 točke), potrebujemo vsaj 4 barve. Zgornjo mejo lahko dobimo z barvanjem točk (graf pobarvamo s 4 barvami) ali iz Brooksovega izreka: za barvanje grafa, ki ni poln graf ali lih cikel, potrebujemo največ $\Delta(G)=4$ barve. Barvnost grafa G je torej enaka 4.

4. Nobena od trditev ne drži, saj lahko za vsako najdemo protiprimer. Protiprimer za trditvi (a) in (c) je lahko kar cikel na 4 točkah. Je Hamiltonov in Eulerjev na sodem številu točk. Njegov komplement je sestavljen iz dveh kopij K_2, to je iz dveh kopij grafa na dveh točkah z eno povezavo. Le-ta pa ni niti Hamiltonov, niti Eulerjev, saj sploh ni povezan in zato ne more imeti niti Hamiltonovega cikla niti Eulerjevega obhoda.

   Protiprimer za točko (b) je na primer pot na treh točkah. Ni Hamiltonov, saj ima točke stopnje 1. Njegov komplement tudi ni Hamiltonov, saj ni povezan (ima samo eno povezavo).

   Za komplement Eulerjevega grafa, ki ima liho število točk, sicer velja, da imajo vse njegove točke sodo stopnjo. Vendar se lahko zgodi, da ni povezan! Vzemimo na primer graf

$$K_9\backslash\{(1:2),(2:3),(1:3),(4:5),(5:6),(4:6),(7:8),(8:9),(7:9)\}.$$

   Ima 9 točk stopnje 6 in je povezan, torej ima Eulerjev obhod. Njegov komplement pa je sestavljen iz treh trikotnikov. Vse točke komplementa imajo sicer sodo stopnjo (dve), a graf ni povezan in zato ne more imeti Eulerjevega obhoda.

2. izpit, 17. februar 2011

1. Popolnih kvadratov med števili od 1 do 1000000 je 1000 (to so števila $1^2, 2^2, \ldots, 1000^2$), popolnih kubov pa je 100 (to so števila $1^3, 2^3, \ldots, 100^3$). Števil, ki so hkrati popolni

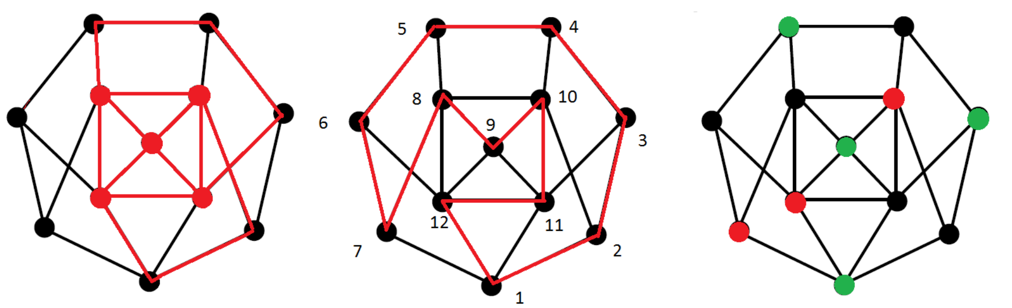
kvadrati in popolni kubi, je 10 (to so števila $1^6, 2^6, \ldots, 10^6$). Po pravilu vključitev in izključitev dobimo

$$1000000 - 1000 - 100 + 10 = 998910$$

števil, ki niso niti popolni kvadrati, niti popolni kubi.

2. Vsota treh števil je sodo število, če so vsa tri soda ali če sta dve števili lihi in eno sodo. V množici $\{1, 2, \ldots, 100\}$ je 50 sodih in 50 lihih števil. Tri soda števila lahko zato s ponavljanjem izberemo na $\binom{50+3-1}{3} = 22100$ načinov, dve lihi in eno sodo pa na $\binom{50+2-1}{2}\binom{50}{1} = 1275 \cdot 50 = 63750$ načinov. Skupaj lahko tri števila s sodo vsoto izberemo na $22100 + 63750 = 85850$ načinov.

3. Graf G ni ravninski, saj vsebuje subdivizijo grafa K_5, glej sliko spodaj, levo. Graf G ima Hamiltonov cikel, na primer $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 1$, glej sliko spodaj v sredini, kjer so povezave, ki so v Hamiltonovem ciklu, pobarvane rdeče. Barvnost grafa G je enaka tri. Sklepamo takole. Ker graf vsebuje kliko velikosti 3 (na primer trikotnik $8, 9, 10, 8$), potrebujemo vsaj tri barve. Ker se da graf pobarvati s tremi barvami, glej sliko spodaj, desno, potrebujemo največ 3 barve.



4. (a) Naj bo G enostaven graf na 25 točkah, ki ima 24 povezav in ni povezan. Ker graf G ni povezan, ima vsaj dve povezani komponenti. Označimo s t število povezanih komponent grafa G in z n_i, $i = 1, \ldots, t$ števila točk v posamezni komponenti. Povezan graf z n_i točkami, ki nima cikla, ima največ $n_i - 1$ povezav. Če graf G nima nobenega cikla, potem ima največ

$$\sum_{i=1}^{t}(n_i - 1) = 25 - t$$

povezav. Ker je $t \geq 2$, je to največ 23 povezav. Protislovje. Torej mora imeti graf G cikel.

   (b) Trditev ne velja. Protiprimer je na primer graf, ki je sestavljen iz poti na 24 točkah in ene izolirane točke. Ni povezan, ima 23 povezav, vendar ne vsebuje nobenega cikla.