Rešitve 1. kolokvija iz DISKRETNE MATEMATIKE 1 (FM)

z dne 5. decembra 2012

1. V skupini je 10 parov. Na koliko načinov lahko izmed njih izberemo 5 ljudi, če

   (a) med njimi ni nobenega para?

   (b) sta med njimi vsaj dva para?

   (c) sta med njimi točno dva para?

Rešitev.

(a) Izmed desetih parov izberemo pet parov na $\binom{10}{5}$ načinov, pri vsakem paru pa sta še dve možnosti, koga izbrati. Skupaj torej na

$$\binom{10}{5} \cdot 2^5 = 8064$$

načinov. Alternativno: najprej izberemo enega izmed 20 ljudi, nato enega izmed 18 (partnerja ne izberemo), in tako naprej, na koncu delimo še z vsemi možnimi vrstnimi redi izbire, ker vrstni red izbire ni pomemben. Načinov je torej

$$\frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12}{5!} = 8064.$$

Točkovanje: 10 točk (če manjka 2^5 oziroma niste delili s 5! pri drugi rešitvi, samo 5 točk).

(b,c) Izkaže se, da sta pri teh podatkih nalogi enaki, skupaj štejeta 15 točk (oziroma, 10 točk, če niste opazili, da je rešitev ista in ste eno od nalog rešili narobe).

Da izberemo 5 ljudi, od tega točno dva para, izmed 10 parov izberemo dva, izmed preostalih 16 ljudi izberemo pa enega. To storimo na

$$\binom{10}{2} \cdot 16 = 720$$

načinov.

2. Na koliko načinov lahko med 4 otroke razdelimo 6 čokolad, 5 piškotov in 3 bonbone? Kaj pa, če vsak otrok dobi vsaj eno od sladkarij? Vse sladkarije iste vrste so enake.

Rešitev. Pri štetju si lahko pomagamo s porazdelitvami. Elementi so sladkarije ene vrste, neoznačeni. Celice so otroci, označeni. Pri prvem vprašanju so celice lahko prazne. Zmnožimo število načinov za razdelitev čokolad, piškotov in bonbonov in dobimo:

$$\binom{4+6-1}{6}\binom{4+5-1}{5}\binom{4+3-1}{3} = \binom{9}{6}\binom{8}{5}\binom{6}{3} = 84 \cdot 56 \cdot 20 = 94080.$$

Pri drugem vprašanju je zahtevano, da vsak otrok dobi vsaj eno sladkarijo, torej vsaj eno čokolado ali piškot ali bonbon. Od vseh možnosti odštejemo tiste, pri katerih kakšen od otrok ne dobi nič.

Pomagamo si s pravilom vključitev in izključitev. Naj bo A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, množica razdelitev, pri katerih otrok i ne dobi nič. Delimo torej med tri otroke, zato

$$|A_i| = \binom{3+6-1}{6}\binom{3+5-1}{5}\binom{3+3-1}{3} = \binom{8}{6}\binom{7}{5}\binom{5}{3} = 28 \cdot 21 \cdot 10 = 5880.$$

Če po dva otroka ne dobita nič, delimo samo dvema otrokoma. Zato je za $i \neq j$

$$|A_i \cap A_j| = \binom{2+6-1}{6}\binom{2+5-1}{5}\binom{2+3-1}{3} = \binom{7}{6}\binom{6}{5}\binom{4}{3} = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168.$$

Če po trije otroci ne dobijo nič, četrti otrok dobi vse. Trojni preseki množic A_i imajo torej moč 1, četvorni preseki pa so prazni, saj nekdo mora dobiti sladkarije, če vse razdelimo. Po pravilu vključitev in izključitev dobimo

$$94080 - \binom{4}{1} \cdot 5880 + \binom{4}{2} \cdot 168 - \binom{4}{3} \cdot 1 = 71564$$

možnih razdelitev.

Točkovanje: prvo vprašanje 10 točk, drugo vprašanje 15 točk.

3. Študenti 1. letnika imajo v predmetniku 8 predmetov, vse ure posameznega predmeta se izvajajo na isti dan (v blokih). Na koliko načinov lahko sestavljalec urnika razdeli predmete po dnevih (ponedeljek, torek, sreda, četrek, petek) tako,

   (a) da bodo študenti vsak dan imeli vsaj en predmet?

   (b) da bodo študenti vsaj en dan prosti?

   (c) da bodo v petek imeli na urniku manj predmetov kot v torek?

   Opomba: določeno je samo, kateri predmeti bodo na posamezen dan, ne pa tudi njihov vrstni red.

Rešitev. Nalogo lahko rešujemo s pomočjo porazdelitev. Predmeti (8) so elementi, označeni (jih razlikujemo), dnevi (5) so celice, označene.

(a) Pri tej nalogi so celice neprazne. Razdelitev je torej

$$5!\, S(8,5) = 120 \cdot 1050 = 126000.$$

(b) Od vseh možnosti odštejemo tiste, pri katerih je vsak dan vsaj en predmet. Dobimo:

$$5^8 - 126000 = 390625 - 126000 = 264625.$$

(c) Najhitreje nalogo rešimo, če upoštevamo, da je razdelitev, pri katerih je v petek manj predmetov kot v torek, enako, kot razdelitev, pri katerih je v torek manj predmetov kot v petek. Od vseh razdelitev je torej treba odšteti tiste, pri katerih je predmetov v torek in v petek enako, in deliti z dva.

Možnosti, pri katerih je v petek in v torek enako predmetov, je

$$3^8 + 8 \cdot 7 \cdot 3^6 + \binom{8}{2}\binom{6}{2} \cdot 3^4 + \binom{8}{3}\binom{5}{3} \cdot 3^2 + \binom{8}{4} = 86515.$$

Po vrsti smo sešteli, ko je v torek in petek po 0,1,2,3 ali 4 predmetov. Dobimo torej

$$\frac{5^8 - 86515}{2} = 152055$$

razdelitev.

Nalogo je možno rešiti tudi z naštevanjem vseh možnosti, pri katerih je v petek manj predmetov kot v torek (0:1-8, 1:2-7, ... ,3:4-5), vendar je možnosti zelo veliko, in jih je težko pravilno sešteti.

Točkovanje: 6+6+13=25 točk.

4. Naj bo A množica moči 18, njeni elementi pa soda števila med 2 in 500. Pokažite, da ima množica A vsaj dve podmnožici moči 3 z isto vsoto elementov.

Rešitev. Najmanjša izmed vsot po treh elementov med 2 in 500 je $12 = 2 + 4 + 6$, največja pa $1494 = 496 + 498 + 500$. Možnih vsot je torej $(1494 - 12)/2 + 1 = 742$.

Podmnožic moči 3 množice z 18 elementi je $\binom{18}{3} = 816$.

Ker je podmnožic moči 3 več kot možnih vsot, imata po Dirichletovem načelu vsaj dve podmnožici isto vsoto elementov.

(Elementi so podmnožice, celice so možne vsote).