1. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE 1 (FM)

27. november 2013

Rešitve

Priimek in ime: ______________________

Vpisna št.: ____________ Vrsta: ____________ Kolona: ____________

1. (20 točk) Koliko je šestmestnih desetiških števil z vsoto števk enako 51?

Vsoto 51 lahko sestavimo na naslednje načine:

$$51 = 3\cdot 9 + 3\cdot 8$$
$$= 4\cdot 9 + 8 + 7$$
$$= 5\cdot 9 + 6$$

Ustreznih 6-mestnih števil je

$$\binom{6}{3} + 6\cdot 5 + 6 = 20 + 30 + 6 = 56$$

$\binom{6}{3}$: 3 mesta za 8, na ostala mesta damo 9

6: 1 mesto za 8

5: 1 mesto za 7

Na ostala mesta damo 9

6: Izberemo mesto za 6, na ostala mesta damo 9

Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič.

2. (30 točk) Na koliko načinov lahko med 3 študente razdelimo 13 različnih knjig, če vsak dobi vsaj eno knjigo? Kaj pa, če vsak dobi vsaj dve knjigi? Nasvet: uporabite načelo vključitev in izključitev.

a) Rešimo s pomočjo porazdelitev

študenti - škatle (4), jih razlikujemo, neprazne

knjige - elementi (13), jih razlikujemo

Iz tabele odčitamo: $3!\,S(13,3) = 6 \cdot 261\,625 = 1569750$

b) Od možnosti iz točke a) odštejemo tiste, kjer katerikoli od študentov dobi samo eno knjigo.

Rešimo z načelom vključitev in izključitev

$A_i = \{$ porazdelitve, kjer študent i dobi 1 knjigo $\}$

$|A_i| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{izbira knjige za} \\ \text{študenta } i}}{13} \cdot \underbrace{2!\,S(12,2)}_{\substack{\text{ostale} \\ \text{knjige} \\ \text{2 študentoma}}} = 13 \cdot 2 \cdot 2047 = 53222$

$|A_i \cap A_j| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{izbira knjige} \\ \text{za študenta } i}}{13} \cdot \underset{\substack{\text{izbira knjige za} \\ \text{študenta } j}}{12} = 156$, vse ostale dobi tretji študent

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$, ker moramo razdeliti vseh 13 knjig.

Rezultat: $1569750 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$

$= 1569750 - 3 \cdot 53222 + 3 \cdot 156 = 1410552$

Nalogo lahko rešimo tudi tako, da od vseh možnih razdelitev odštejemo tiste, pri katerih katerikoli študent dobi 0 ali 1 knjigo

$A_i = \{$ porazdelitve, kjer študent i dobi 0 ali 1 knjigo $\}$

$|A_i| = 13 \cdot 2^{12} + 2^{13} = 61440$

$|A_i \cap A_j| = \underset{1}{\overset{0,0}{1}} + \overset{0,1\,;\,1,0}{2 \cdot 13} + \overset{1,1}{13 \cdot 12} = 183$, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$

Rezultat: $3^{13} - 3 \cdot 61440 + 3 \cdot 183 = 1410552$

3. (5+10+10 točk) Trgovski potnik obišče 4 mesta, vsako natanko 5-krat. Na koliko načinov lahko to stori

(a) brez dodatnih omejitev?

(b) če začne in konča v istem mestu?

(c) če mesti A in B vedno obišče zaporedoma (lahko v različnem vrstnem redu)?

Opomba: potovanje trgovskega potnika opišemo z zaporedjem krajev, ki jih obišče; isti kraj lahko obišče tudi dvakrat zaporedoma.

Označimo 4 mesta s črkami A, B, C, D

Potovanje ustreza torej zaporedju dolžine 20,

v katerem se vsaka od črk A, B, C, D pojavi po 5x

a) Rešitev je $\frac{20!}{5!\,5!\,5!\,5!}$

b) Začnemo in končamo z istim krajem

na $\underbrace{\frac{18!}{5!\,5!\,5!\cdot 3!}} \cdot 4$ načinov

A, B, C ali D na začetku in koncu

$\underline{A}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}\ A$

18 znakov; B, C, D po 5x

A 3x

c) AB štejemo kot eno enoto; imamo 3 znake, vsak se pojavi po 5x

$$\frac{15!}{5!\,5!\,5!} \cdot 2^5$$

na vsakem od 5 mest za AB imamo lahko AB ali BA

4. (25 točk) Naj bo n naravno število in $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 3n\}$ množica moči $n+1$. Z uporabo Dirichletovega načela pokažite, da v A obstajata dva elementa, ki se razlikujeta najmanj za n in največ za $2n$.

Elementi: elementi množice A $(n+1)$

Celice: $1, 2, \ldots, n$

v celico i damo i, $n+i$ in $2n+i$ $i = 1, \ldots, n$

Ker je celic manj kot elementov, bosta po Dirichletovem načelu vsaj v eni celici vsaj dva elementa. To pa pomeni, da ~~bosta najmanj razlika~~ se razlikujeta najmanj za n in največ za $2n$:

3 možnosti: v celici i sta

i, $n+i$: $n+i-i = n$

i, $2n+i$: $2n+i-i = 2n$

$n+i$, $2n+i$: $2n+i-(n+i) = n$