2. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE 1 (FM)

24. januar 2013

REŠITVE

Priimek in ime: ______________________

Vpisna št.: ____________ Vrsta: ____________ Kolona: ____________

1. Poiščite koeficient pri x^{15} za

$$f(x) = \frac{x+2x^2}{(1-x)^6} \quad \text{in} \quad g(x) = \frac{(1+2x)^4}{(1-x)^6}.$$

$$(1-x)^{-6} = \sum_{i\geq 0} \binom{6+i-1}{i} x^i = \sum_{i \geq 0} \binom{5+i}{i} x^i$$

koef pri x^{15} za $f(x)$: $x \cdot \binom{5+14}{14} \cdot x^{14} + 2x^2 \binom{5+13}{13} \cdot x^{13}$

10

koeficient: $\binom{5+14}{5} + 2\binom{5+13}{5} = 11628 + 2 \cdot 8568$

$= 11628 + 17136 = \underline{28764}$

15

$$g(x) = \left(\sum_{i=0}^{4} \binom{n}{i} 1^{4-i} (2x)^i \right) \cdot \left(\sum_{i \geq 0} \binom{5+i}{i} x^i \right)$$

x^{15}: $\binom{4}{0}(2x)^0 \cdot \binom{5+15}{15} \cdot x^{15} + \binom{4}{1}(2x)^1 \cdot \binom{5+14}{14} x^{14} + \binom{4}{2}(2x)^2 \binom{5+13}{13} x^{13}$

$+ \binom{4}{3}(2x)^3 \binom{5+12}{12} x^{12} + \binom{4}{4}(2x)^4 \binom{5+11}{11} \cdot x^{11}$

koeficient pri x^{15}: $\binom{20}{5} + 4 \cdot 2 \cdot \binom{19}{5} + 6 \cdot 4 \cdot \binom{18}{5} + 4 \cdot 8 \cdot \binom{17}{5} + 1 \cdot 16 \cdot \binom{16}{5}$

$= 15504 + 8 \cdot 11628 + 24 \cdot 8568 + 32 \cdot 6188 + 16 \cdot 4368 = \underline{582064}$

Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič.

2. Naj bo a_n število n-mestnih številk iz števk $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, pri katerih se sode števke ne pojavijo zaporedoma. Izračunajte a_1, a_2 in a_3. Zapišite rekurzivno enačbo, ki ji ustreza zaporedje (a_n), in jo rešite.

Sodih števk je : 3 (2, 4, 6)

lihih : 4 (1, 3, 5, 7)

$a_1 = 7$

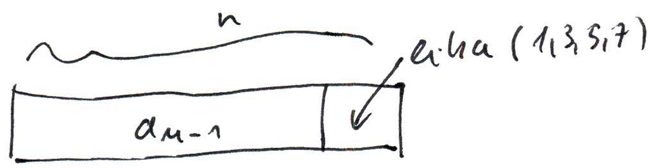
$a_2 = 3\cdot 4 + 4\cdot 3 + 4\cdot 4 = 40$

SL, LS, LL

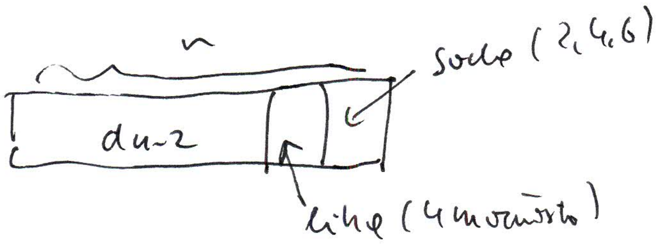
$a_3 = 4\cdot 4\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 7 + 4\cdot 3\cdot 4 = 244$

LL S/L
SL S/L
LSL

5



$a_n = 4a_{n-1} + 12a_{n-2}$



10

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x-6)(x+2) = 0$

$x_1 = 6, \; x_2 = -2$

$a_n = A\cdot 6^n + B(-2)^n$

5

$1 = a_0 = A + B$

$7 = a_1 = 6A - 2B$

$8A = 9$

$A = \frac{9}{8}, \quad B = -\frac{1}{8}$

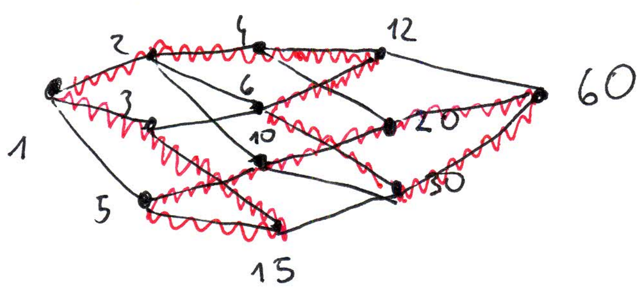
$a_n = \frac{9}{8}6^n - \frac{1}{8}(-2)^n$

5

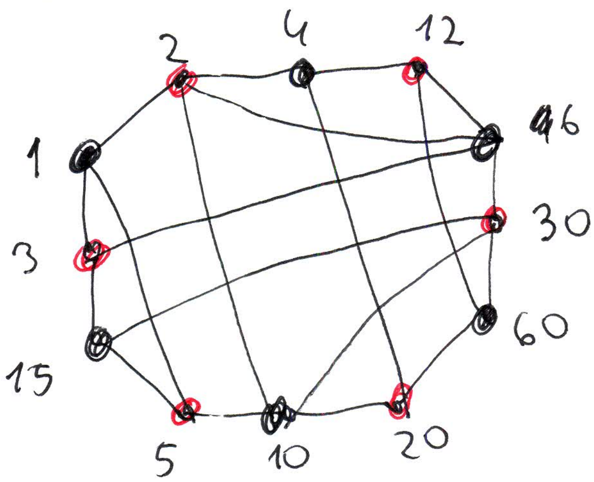
3. Naj bo a naravno število in M_a množica vseh naravnih števil, ki delijo število a. Definirajmo graf G_a takole: točke grafa G_a so elementi množice M_a, točki x in y pa sta povezani natanko tedaj, kadar obstaja tako praštevilo p, da velja $x = py$ ali $y = px$.

   (a) Čim lepše narišite graf G_{60}. 8
   (b) Poiščite njegovo barvnost 5
   (c) Ali je G_{60} ravninski graf? 6
   (d) Ali G_{60} vsebuje Hamiltonov cikel? 6

$M_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$



• G_{60} ima Hamiltonov cikel (rdeče). Narišemo še enkrat (Ham. cikel na robu)!



• G_{60} je ravninski:
povezave (1:5), (2:10), (4:20), (12:60) narišemo na zunanji strani Ham. cikla in dobimo ravninsko risbo.

• $\chi(G_{60}) = 2$, ker je G_{60} dvodelen.
(barvanje zgoraj z R in Č barvo je pravilno)

4. Ali obstaja povezan graf na 8 točkah, ki je izomorfen svojemu komplementu in vsebuje natanko dve točki stopnje 6? Če obstaja, koliko povezav in točk ima, kakšne so stopnje točk?

$n = 8$

G samo-komplementaren: $|E(G)| = \frac{\binom{n}{2}}{2} = \frac{n(n-1)}{4} = 28$ za $n=8$

Tako v stopnje 6 v $G \Rightarrow v$ stopnje 1 v $\overline{G}$

Torej ima G ~~[illegible]~~ dve točki stopnje 6 in dve točki stopnje 1

Ker velja: $2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} \deg(v)$, je vsota stopenj

za preostale 4 točke skupaj 14.

Možnosti: a) $3+3+4+4$

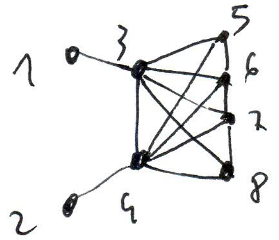
b) $2+3+4+5$

c) $2+2+5+5$

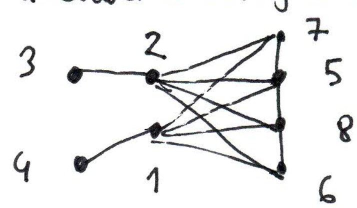
10

Primer za a) v bistvu enolično določen – točki stopnje 6 sta sosednji z vsemi, razen po eno točko stopnje 1 (nekoliko drugačna razporeditev točk)

G:



$\overline{G}$:



10

Očitno G in $\overline{G}$ izomorfna:

φ: $V(G)$	1	2	3	4	5	6	7	8
$V(\overline{G})$	3	4	2	1	7	5	8	6

$\varphi: V(G) \to V(\overline{G})$ je bijekcija, ki ohranja povezave – istoležne povezave v sliki G se preslikajo na isto mesto v $\overline{G}$ (sliki sta enaki, samo točke so drugače označene)

Primere b) in c) ne moremo nastopiti, če imamo poleg ~~[illegible]~~ dveh točk stopnje 6 in dveh točk stopnje 1 še točko stopnje 5, imajo preostale 3 točke stopnjo vsaj 3 (Narišite si!)

Graf ima 28 povezav, 8 točk, stopnje točk so 6, 6, 4, 4, 3, 3, 1, 1

5