2. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE 1 (FM)

21. januar 2014

Priimek in ime: ______________________

Vpisna št.: ____________ Vrsta: ____________ Kolona: ____________

1. Označimo z a_n število načinov, na katere lahko razdelimo n bonbonov med 5 otrok tako, da vsak otrok dobi vsaj dva bonbona (bonboni so vsi enaki).

   (a) Poiščite rodovno funkcijo zaporedja (a_n).

   (b) Poiščite eksplicitno formulo za a_n, $n \geq 0$.

   (c) Koliko je a_{30}?

$A_i(x)$ .. rodovna funkcija za razdelitev bonbonov otroku i (dobi vsaj dva bonbona), $i = 1,..,5$

$$A_i(x) = x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{x^2}{1-x}$$

$$A(x) = A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_5(x) = \underline{\underline{\frac{x^{10}}{(1-x)^5}}}$$

$$A(x) = x^{10}(1-x)^{-5} = x^{10} \sum_{n \geq 0} \binom{5+n-1}{n} x^n$$

koeficient pred x^n: $(n \geq 10)$
$$\binom{5+(n-10)-1}{n-10} = \binom{n-6}{n-10} = \binom{n-6}{4}$$

$$a_n = \begin{cases} 0; & n < 10 \\ \binom{n-6}{4}; & n \geq 10 \end{cases}$$

$$a_{30} = \binom{24}{4} = 10\,626$$

Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič.

2. Označimo z a_n število načinov, na katere lahko pokrijemo šahovnico velikosti $1 \times n$ s ploščicami velikosti 1×1, 1×2 in 1×3, če so ploščice velikosti 1×1 in 1×2 dveh različnih barv, ploščice velikosti 1×3 pa treh različnih barv.

   (a) Določite a_0, a_1, a_2 in a_3.

   (b) Zapišite in rešite rekurzivno enačbo za zaporedje (a_n), v rešitvi naj ne nastopijo kompleksna števila.

$a_0 = 1$

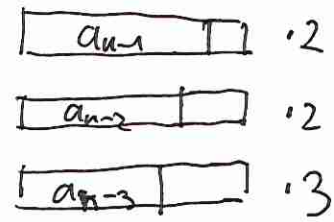
$a_1 = 2$ $\quad \times 2$

$a_2 = 6$ $\quad \times 2\cdot 2, \quad \times 2$

$a_3 = 19$ $\quad \times 3, \quad \times 2\cdot 2, \quad \times 2\cdot 2, \quad \cdot 2^3$

$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-3}$

Tlakovanje lahko začnemo s ploščico 1×1, 1×2 ali 1×3



Rešimo rekurzivno enačbo:

$a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} - 3a_{n-3} = 0$

$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x^2+x+1) = 0$

$x_1 = 3$

$x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \pm i \sin\frac{2\pi}{3}, \quad |x_{2,3}| = 1$

$a_n = A \cdot 3^n + B \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right) + C \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 1 = A + B \\ a_1 &= 2 = 3A + B\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) + C\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a_2 &= 6 = 9A + B\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) - C\tfrac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad A = \frac{9}{13}, \quad B = \frac{4}{13}, \quad C = \frac{2\sqrt{3}}{39}$$

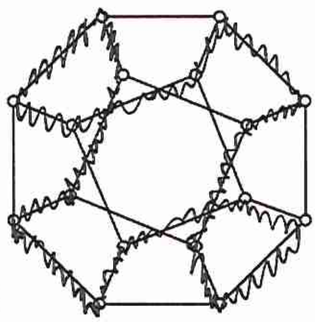
$$\boxed{a_n = \frac{9}{13}\cdot 3^n + \frac{4}{13}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot n\right) + \frac{2\sqrt{3}}{39}\sin\left(\frac{2\pi}{3} n\right)}$$

3. Ali sta grafa G in H na spodnji sliki izomorfna?

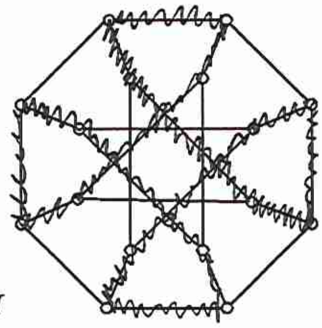
Grafa nista izomorfna, H je dvodelen, G pa ne.
(Ali: G je ravninski, H pa ne)

Za vsakega od njiju odgovorite še na naslednja vprašanja.

(a) Ali je graf Hamiltonov?



G



H

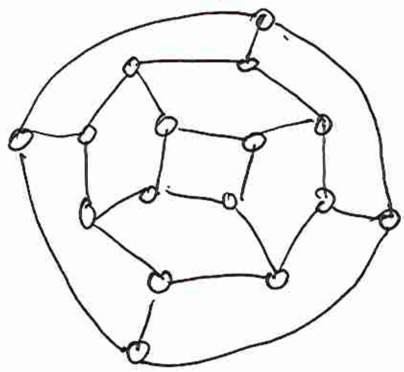
Je Hamiltonov, Ham. cikel je označen

Je Hamiltonov, vsebuje Ham. cikel, označen

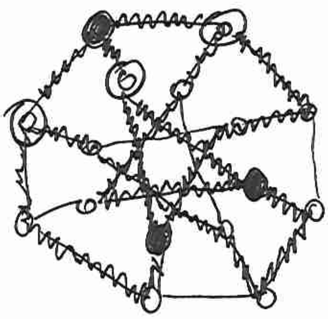
(b) Ali je ravninski?

Je, saj ga v ravnino lahko narišemo tako, da se povezave ne sekajo.

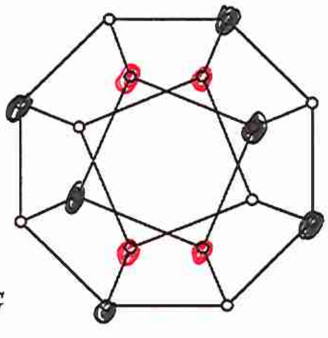
G



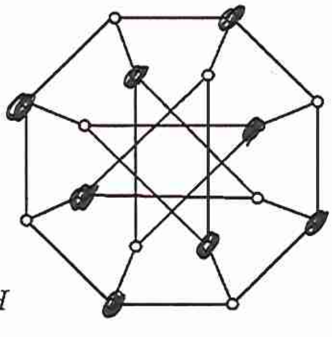
H ni ravninski, vsebuje podgraf, skrčljiv na $K_{3,3}$



(c) Določite njegovo barvnost.



G



H

H je dvodelen $\Rightarrow$ $\chi(H) = 2$

G ima lih cikel $\Rightarrow \chi(G) \geq 3$

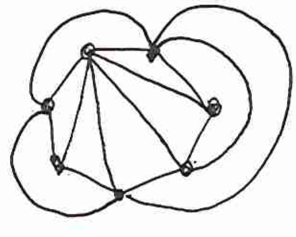
G ~~sm~~ nam je uspelo pobarvati s tremi barvami $\Rightarrow$ $\chi(G) = 3$

4. Naj bo G povezan graf na 7 vozliščih. Koliko je najmanjše in koliko največje število povezav, ki jih G lahko ima, če

(a) je ravninski?

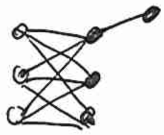
Povezan $\Rightarrow$ vsaj 6 povezav 

Ravninski $\Rightarrow$ največ $3 \cdot 7 - 6 = 15$ povezav



(b) ni ravninski?

Ni ravninski $\to$ skrčljiv na $K_{3,3}$ ali K_5 $\Rightarrow$ najmanj 9 povezav
Da dobimo $K_{3,3}$ iz grafa na 7 vozliščih, moramo skrčiti najmanj eno povezavo $\Rightarrow$ najmanj 10 povezav

Na primer: 

Ni ravninski $\Rightarrow$ največ $\binom{7}{2} = 21$ povezav
(poln graf)

Ustrezen graf je K_7, ki ni ravninski (vsebuje podgraf K_5)

(c) je ravninski in imajo vsa vozlišča stopnjo najmanj tri?

Vsaj eno vozlišče ima potem stopnjo najmanj 4, ker graf ne more imeti liho št. vozlišč lihe stopnje

Lema o rokovanju: $2m = \sum_{u \in V} d(u)$ $\quad 2m \geq 6 \cdot 3 + 4 = 22$

$m \geq 11$

$m \leq 15$, isti graf kot pri točki (a)
(kot pri (a))

Navodilo. Za vsakega od primerov (a)-(c) poiščite spodnjo in zgornjo mejo za število povezav in na primeru pokažite, da je ta meja tudi dosežena.