Izbori
Variacije
Kombinacije
Porazdelitve
Metoda tirov
Povzetek

Diskretna matematika 1 / Kombinatorika

2. Klasične konfiguracije

Vladimir Batagelj

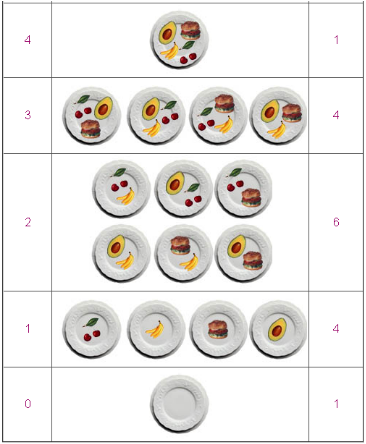
Univerza v Ljubljani

FMF, matematika – Finančna matematika

Ljubljana, oktober 2013 / februar 2008

Kazalo

1 Izbori
2 Variacije
3 Kombinacije
4 Porazdelitve
5 Metoda tirov
6 Povzetek



Math fun: Pascal triangle

Učilnica: http://ucilnica.fmf.uni-lj.si/course/view.php?id=39

Različica: 29. oktober 2013

Izbori

Iz končne množice $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ izberemo r elementov

$$b_1, b_2, \ldots, b_r$$

Dobljenemu zaporedju elementov pravimo r-izbor; številu r pa velikost ali red izbora.

Naštejmo nekaj primerov izborov:

- slovenska beseda sestavljena iz 6 črk:
  B E S E D A ;
- razcep naravnega števila na prafaktorje:
  $504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2$;
- top lista plošč;
- karte v roki (pri taroku).

Izbori

Iz naštetih zgledov razberemo, da se posamezni izbori razlikujejo glede na naslednji "neodvisni" lastnosti:

- **ponavljanje**: v nekaterih izborih se lahko posamezni element množice A pojavi večkrat; ali pa morajo biti vsi elementi, ki nastopajo v izboru, med seboj različni. V prvem primeru govorimo o izboru s ponavljanjem, v drugem pa o izboru brez ponavljanja.
- **urejenost**: v nekaterih izborih je vrstni red elementov, ki v njem nastopajo, pomemben – pravimo jim urejeni izbori ali variacije (razporedbe); v drugih pa nas urejenost elementov ne zanima – pravimo jim neurejeni izbori ali kombinacije (sestave).

V novejši literaturi iz kombinatorike namesto besede variacija praviloma uporabljajo besedo permutacija.

Izbori

DiMa 2
Konfiguracije

V. Batagelj

Izbori
Variacije
Kombinacije
Porazdelitve
Metoda tirov
Povzetek

Dogovorimo se, da bomo pri zapisu izborov vrst izbora označili tako, da bomo zaporedje postavili v ustrezene oklepaje, kakor določa tabela:

	urejen	neurejen
s ponavljanjem	$(\quad)$	$[\quad]$
brez ponavljanja	$\langle\quad\rangle$	$\{\quad\}$

Vpeljimo še oznake za posamezne množice r-izborov nad množico A :

$\mathcal{V}(A, r)$ – variacije (brez ponavljanja);
$\bar{\mathcal{V}}(A, r)$ – variacije s ponavljanjem;
$\mathcal{C}(A, r)$ – kombinacije (brez ponavljanja);
$\bar{\mathcal{C}}(A, r)$ – kombinacije s ponavljanjem.

Izbori

Zgled: Naj bo $A = \{a, b, c\}$, potem je

$$\mathcal{V}(A, 2) = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle\}$$

in

$$\bar{\mathcal{C}}(A, 2) = \{[a, a], [a, b], [a, c], [b, b], [b, c], [c, c]\}$$

$\square$

Ker nas pri proučevanju izborov same lastnosti elementov množice A ne zanimajo, se običajno omejimo na standnardno množico – celoštevilski interval $1..n$. Ustrezne množice izborov tedaj označimo $\mathcal{V}(n, r)$, $\bar{\mathcal{V}}(n, r)$, $\mathcal{C}(n, r)$ in $\bar{\mathcal{C}}(n, r)$.
Poskusimo sedaj te množice prešteti! Njihove moči označimo, tako da pisano črko nadomestimo z običajno. Na primer:

$$C(n, r) = |\mathcal{C}(n, r)|$$

Variacije reda r iz n elementov s ponavljanjem

Vzemimo variacijo reda r s ponavljanjem: $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_r)$. Če ji odstranimo prvi člen, dobimo variacijo reda $r-1$ s ponavljanjem:

$$(b_2, b_3, \ldots, b_r)$$

Torej dobimo variacijo reda r s ponavljanjem tako, da izberemo nek element množice A in nato še neko variacijo reda $r-1$ s ponavljanjem ter ju združimo.

$$\bar{\mathcal{V}}(A, r) = \bar{\mathcal{V}}(A, r-1) \times A, \; r > 1 \qquad \text{in} \qquad \bar{\mathcal{V}}(A, 1) = A$$

in potemtakem $\bar{\mathcal{V}}(A, r) = A^r$.
Ker sta oba izbora neodvisna, je po pravilu produkta

$$\bar{V}(n, r) = n \cdot \bar{V}(n, r-1), \quad r > 1$$

Upoštevamo še, da je $\bar{V}(n, 1) = n$, pa dobimo $\bar{V}(n, r) = n^r$.

Variacije reda r iz n elementov brez ponavljanja

Podobno kot pri variacijah s ponavljanjem lahko vsako variacijo reda r

$$\langle b_1, b_2, \ldots, b_r \rangle$$

dobimo tako, da združimo element iz množice A in neko variacijo reda $r-1$ nad preostalimi elementi.

$$\mathcal{V}(A, r) = \bigcup_{b \in A} \mathcal{V}(A \setminus \{b\}, r-1) \times \{b\}, \;\; r > 1 \quad \text{in} \quad \mathcal{V}(A, 1) = A$$

Torej je po posplošenem pravilu produkta

$$V(n, r) = n.V(n-1, r-1), \quad r > 1$$

od koder, ker je $V(n, 1) = n$, izhaja

$$V(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Variacije reda r iz n elementov brez ponavljanja

Produkt v gornjem obrazcu pogosto krajše označimo z

$$n_{[r]} = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

V posebnem primeru, ko je $r = n$, pravimo taki variaciji permutacija. Množico vseh permutacij n elementov označimo s $\mathcal{P}(n)$. Velja:

$$P(n) = |\mathcal{P}(n)| = |\mathcal{V}(n,n)| = V(n,n) = n!$$

Pri ocenah nam pride pogosto prav Stirlingov približek za $n!$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Kombinacije reda r iz n elementov brez ponavljanja

Razmišljamo takole: izberimo poljubno izmed njih. To lahko storimo na $C(n, r)$ načinov. če jo uredimo, kar lahko storimo na $P(r)$ načinov, dobimo ravno variacije (brez ponavljanja) – torej $V(n, r)$ konfiguracij. Po pravilu produkta tedaj velja:

$$C(n, r).P(r) = V(n, r)$$

oziroma

$$C(n, r) = \frac{V(n, r)}{P(r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Običajno uporabljamo namesto oznake $C(n, r)$ oznako $\binom{n}{r}$, ki ji pravimo, razloge bomo spoznali kasneje, binomski simbol ali tudi binomski koeficient.

Kombinacije reda r iz n elementov zveze

Izbori
Variacije
Kombinacije
Porazdelitve
Metoda tirov
Povzetek

Veljajo še zveze

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}(A,r)} \mathcal{P}(C) = \mathcal{V}(A,r)$$

$$\mathcal{C}(A,r) = \mathcal{C}(A \setminus \{b\}, r-1) \times \{b\} \cup \mathcal{C}(A \setminus \{b\}, r)$$

$$\mathcal{C}(A,0) = \{\emptyset\} \qquad \mathcal{C}(A,n) = \{A\}$$

Neposredno iz definicije lahko pokažemo, da veljajo za binomski koeficient naslednje lasnosti:

1. $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$
2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
3. $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

Izbori
Variacije
Kombinacije
Porazdelitve
Metoda tirov
Povzetek

Kombinacije reda r iz n elementov
Pascalov trikotnik

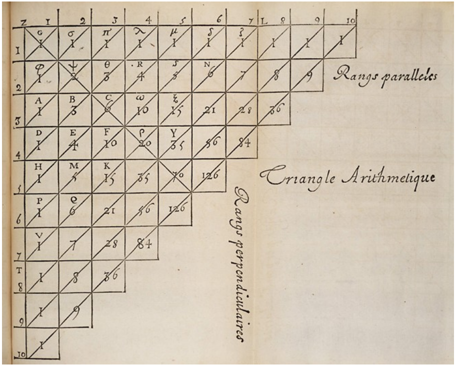
Iz lastnosti 2 in 3 izhaja, da lahko binomske koeficiente uredimo v tako imenovani Pascalov trikotnik:

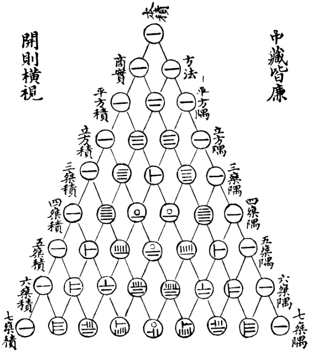
$$\begin{array}{rcccccccccccc}
 & & & & & & & \swarrow\ r=0 \\
n=0 \rightarrow & & & & & & 1 & & \swarrow\ r=1 \\
n=1 \rightarrow & & & & & 1 & & 1 & & \swarrow\ r=2 \\
n=2 \rightarrow & & & & 1 & & 2 & & 1 & & \swarrow\ r=3 \\
n=3 \rightarrow & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \swarrow\ r=4 \\
n=4 \rightarrow & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \swarrow\ r=5 \\
n=5 \rightarrow & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

ki ima naslednje lasnosti:

- na robu imamo vrednosti 1;
- vrednost v naslednji vrstici med dvema zaporednima številoma dobimo tako, da števili seštejemo.

Kombinacije reda r iz n elementov
Pascalov trikotnik





Kombinacije reda r iz n elementov
zveze

Pri računanju vrednosti binomskih koeficientov navadno uporabimo eno od zvez:

4.a $\binom{n}{r} = \frac{n-r+1}{r}\binom{n}{r-1}$ 4.b $\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$

in lasnosti 1 in 2 .

Množico $\mathcal{C}(A, r)$ pravzaprav sestavljajo vse podmnožice množice A, ki imajo moč r . Torej velja $\bigcup_{r=0}^{n} \mathcal{C}(A, r) = 2^A$, kjer je 2^A potenčna množica množice A. Zato je po pravilu vsote $\sum_{r=0}^{n} |\mathcal{C}(A, r)| = |2^A|$; oziroma

5. $$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

Kombinacije reda r iz n elementov
zveze

Ker lahko vsaki množici $B \in \mathcal{C}(A, r)$ povratno enolično priredimo karakteristični vektor, ki ga sestavlja r enic in $n - r$ ničel, lahko rečemo tudi

> $C(n, r)$ = *število različnih načinov, na katere lahko na n mest postavimo r enic in $n - r$ ničel.*

Morda najpomembnejša lastnost binomskih koeficientov, pa je Newtonov obrazec

6. $$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Kombinacije reda r iz n elementov Newtonov obrazec

V njegovo veljavnost se prepričamo z indukcijo:
Za $n = 0$ in $n = 1$ je trditev očitna. Pokažimo še veljavnost indukcijskega koraka:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n = (1+x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k =$$

$$= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n}(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1})x^k + \binom{n}{n}x^{n+1} =$$

Upoštevajmo Pascalovo zvezo in $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ pa lahko zapišemo

$$= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k$$

S tem je indukcijski korak utemeljen.

Kombinacije reda r iz n elementov
Newtonov obrazec

Newtonov obrazec je vir cele vrste zanimivih zvez. Tako, če postavimo $x = 1$, dobimo že znano zvezo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Iz enakosti $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ oziroma

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j = \sum_{s=0}^{2n} x^s \sum_{i+j=s} \binom{n}{i}\binom{n}{j}$$

pa s primerjavo koeficientov pri x^n dobimo

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i}\binom{n}{j} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$$

Kombinacije reda r iz n elementov
Newtonov obrazec

Izbori
Variacije
Kombinacije
Porazdelitve
Metoda tirov
Povzetek

Iz analize vemo celo še več: za $\alpha \in R$ velja

$$(1+x)^\alpha = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\alpha}{r} x^r$$

pri čemer je

$$\binom{\alpha}{r} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-r+1)}{r!}, \qquad r > 0, \quad \text{in} \quad \binom{\alpha}{0} = 1$$

V nadaljevanju nas bosta zanimala dva posebna primera $\alpha = -n$ in $\alpha = \frac{1}{2}$. Z nekaj računanja lahko pokažemo, da velja:

$$\binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{r} = \frac{\binom{2r-2}{r-1}}{2r(-4)^{r-1}}$$

Kombinacije reda r iz n elementov s ponavljanjem

Vzemimo neko kombinacijo reda r iz n elementov s ponavljanjem

$$c = [b_1, b_2, \ldots, b_r]$$

Ker pri kombinacijah urejenost ni pomembna, lahko privzamemo, da so b_i urejeni v naraščajočem vrstnem redu $b_i \leq b_{i+1}$. Nekateri členi v kombinaciji so lahko med seboj enaki, zato ji priredimo novo kombinacijo

$$c' = \{b'_1, b'_2, \ldots, b'_r\}$$

po pravilu $b'_i = b_i + i - 1$. Ni težko spревideti, da:

- kombinacija c' je kombinacija brez ponavljanja,
- pravilo določa bijekcijo med $\bar{\mathcal{C}}(n, r)$ in $\mathcal{C}(n + r - 1, r)$.

Torej je

$$\bar{C}(n, r) = C(n + r - 1, r) = \binom{n + r - 1}{r}$$

Kombinacije reda r iz n elementov s ponavljanjem

Kombinacije s ponavljanjem lahko preštejemo tudi takole: vsaki kombinaciji s ponavljanjem priredimo variacijo s ponavljanjem iz dveh elementov 0 in 1, po pravilu, ki ga razberemo iz naslednjega primera: kombinaciji

$$[a_1, a_1, a_1, a_2, a_4, a_7, a_7] \in \bar{C}(9,7)$$

ustreza variacija

$$0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1$$

Ničle štejejo a-je, število enic pred ničlo povečano za 1 pa določa indeks a-ja. Tudi to pravilo določa bijekcijo. Ker je v vsaki prirejeni variaciji r ničel in $n-1$ enic, je potemtakem $\bar{C}(n,r) = C(n+r-1, r)$.

Kombinacije reda r iz n elementov s ponavljanjem

Lahko pa bi ubrali tudi naslednjo pot. Očitno je

$$\bar{C}(n,1) = n \qquad \text{in} \qquad \bar{C}(1,r) = 1$$

Izberimo sedaj nek element iz A. Tedaj nastopita dve izključujoči se možnosti:

- kombinacija vsebuje izbrani element. Takih kombinacij je $\bar{C}(n, r-1)$;
- kombinacija ne vsebuje izbranega elementa. Takih kombinacij je $\bar{C}(n-1, r)$.

$$\bar{\mathcal{C}}(A, r) = \bar{\mathcal{C}}(A, r-1) \times \{b\} \cup \bar{\mathcal{C}}(A \setminus \{b\}, r)$$

$$\bar{\mathcal{C}}(A, 1) = A,\ \bar{\mathcal{C}}(\{a\}, r) = \{[a, a, \ldots, a]\},\ \bar{\mathcal{C}}(\emptyset, r) = \emptyset$$

Po pravilu vsote od tu izhaja zveza

$$\bar{C}(n,r) = \bar{C}(n, r-1) + \bar{C}(n-1, r)$$

Kombinacije reda r iz n elementov s ponavljanjem

Iz te zveze dobimo naprej

$$\bar{C}(n, r) = \sum_{i=1}^{n} \bar{C}(i, r-1)$$

Sestavimo tabelo:

(n, r)	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	4	5	6	7	8	.
3	3	6	10	15	21	.	.	.
4	4	10	20	35	56	.	.	.
5	5	15	35	70	.	.	.	.
6	6	21	.	.	.	.	.	.

Kombinacije reda r iz n elementov s ponavljanjem

Če tabelo zasukamo za 45° zagledamo (nekoliko okrnjen) Pascalov trikotnik. Od tu postavimo domnevo

$$\bar{C}(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$$

ki jo dokažemo z indukcijo.

Porazdelitve

Porazdelitev imenujemo razmestitev elementov iz dane množice po danih celicah (predalčkih, razredih). Poleg urejenosti sta pri porazdelitvi pomembni tudi razločljivost elementov in celic (posplošitev ponavljanja) in praznost posameznih celic. Razločljivost elementov dosežemo tako, da jih ustrezno označimo – pobarvamo, oštevilčimo, i.t.d.

Porazdelitev n označenih elementov po kalupu $(n_1, \ldots, n_r)$

Na koliko načinov lahko označene elemente množice A porazdelimo v r označenih celic, tako da bo v i-ti celici n_i elementov? Pri tem so števila $n_1, n_2, \ldots, n_r$, $\sum n_i = n$ dana vnaprej. Množico vseh takih porazdelitev označimo s

$$\mathcal{C}(A; n_1, n_2, \ldots, n_r)$$

Opozorimo še, da sta porazdelitvi

$$(\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}) \qquad \text{in} \qquad (\{e, f\}, \{c, d\}, \{a, b\})$$

različna elementa množice $\mathcal{C}(\{a, b, c, d, e, f\}; 2, 2, 2)$.
Velja:

$$\mathcal{C}(A; n_1, \ldots, n_r) = \bigcup_{C_r \in \mathcal{C}(A, n_r)} \mathcal{C}(A - C_r; n_1, \ldots, n_{r-1}) \circ C_r$$

Multinomski koeficient

Preštejmo sedaj take porazdelitve. Razmišljamo takole. Označimo z A_i množico elementov v i-ti celici. Množico A_1 lahko izberemo na $C(n, n_1)$ načinov. Ker je $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, lahko izberemo nato množico A_2 na $C(n - n_1, n_2)$ načinov; ...; ker je $(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_{j-1}) \cap A_j = \emptyset$, lahko izberemo nato množico A_j na $C(n - (n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1}), n_j)$ načinov; ... Torej je po pravilu produkta:

$$C(n; n_1, \ldots, n_r) = \prod_{j=1}^{n} C(n - \sum_{i=1}^{j-1} n_i, n_j) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

Temu številu pravimo tudi multinomski koeficient in ga označimo s simbolom $\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_r}$. Zanj velja

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_r^{i_r} \binom{n}{i_1 i_2 \ldots i_r}$$

Omenimo še zvezi: $\mathcal{C}(n, r) = \mathcal{C}(n; r, n - r)$ in $\mathcal{P}(n) = \mathcal{C}(n; 1, 1, 1, \ldots, 1)$.

Porazdelitve n označenih elementov v r neoznačenih celic

Poglejmo si najprej primer, ko so vse celice neprazne. Tovrstne porazdelitve pravzaprav predstavljajo razbitje dane množice na r podmnožic. Njihovo število označimo

$$S(n,r) \qquad \text{ali} \qquad \left\{ {n \atop r} \right\}$$

in ga imenujemo drugo Stirlingovo število.
Naštejmo za primer vse elemente iz $\mathcal{S}(\{a,b,c,d\},2)$:

$$\begin{array}{lll} \{\{a\},\{b,c,d\}\}, & \{\{b\},\{a,c,d\}\}, & \{\{c\},\{a,b,d\}\}, \\ \{\{d\},\{a,b,c\}\}, & \{\{a,b\},\{c,d\}\}, & \{\{a,c\},\{b,d\}\}, \\ \{\{a,d\},\{b,c\}\} & & \end{array}$$

Sedem jih je! Torej je $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$.

Druga Stirlingova števila

Zanje lahko najdemo podobne zveze, kot smo jih za binomska števila.

1. $S(n, 0) = 0$
2. $S(n, 1) = S(n, n) = 1$
3. $S(n, r) = r \cdot S(n-1, r) + S(n-1, r-1)$

Prvi dve zvezi sta očitni, tretjo dobimo po pravilu vsote. Pri poljubnem razbitju množice A na r podmnožic nastopi natanko ena od možnosti:

- množica $\{a_n\}$ je element razbitja; to se lahko zgodi na $S(n-1, r-1)$ načinov;
- množica $\{a_n\}$ ni element razbitja; tedaj lahko element a_n izločimo iz razbitja in dobimo enega od $S(n-1, r)$ razbitij množice $A \setminus \{a_n\}$ na r podmnožic. Iz vsakega izmed njih lahko dobimo $r \cdot S(n-1, r)$ razbitij množice A na r podmnožic, tako da element a_n dodamo eni od njegovih podmnožic.

Druga Stirlingova števila

S temi tremi zvezami so druga Stirlingova števila natančno določena in jih lahko, podobno kot binomska, uredimo v trikotnik:

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
 & & & & & & & \swarrow & r=1 & & & & & \\
 & & & & n=1 \rightarrow & & 1 & & \swarrow & r=2 & & & & \\
 & & & n=2 \rightarrow & & 1 & & 1 & & \swarrow & r=3 & & & \\
 & & n=3 \rightarrow & & 1 & & 3 & & 1 & & \swarrow & r=4 & & \\
 & n=4 \rightarrow & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & & \swarrow & r=5 & \\
n=5 \rightarrow & & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 & & \swarrow & r=6 \\
n=6 \rightarrow & 1 & & 31 & & 90 & & 65 & & 15 & & 1 & &
\end{array}
$$

Pri računanju uporabljamo zvezo 3. Na primer

$$S(6,3) = S(5,2) + 3.S(5,3) \quad \rightarrow \quad 90 = 15 + 3.25$$

Bellova števila

Oglejmo si sedaj še primer tovrstnih porazdelitev, pri čemer so lahko celice tudi prazne.
Če je k celic praznih, porazdeljujemo elemente v preostalih $r-k$ celic. To lahko storimo na $S(n, r-k)$ načinov. Ker je lahko praznih $0, 1, \ldots, r-1$ celic in se te možnosti med seboj izključujejo, je po pravilu vsote iskano število enako

$$S_0(n, r) = \sum_{k=1}^{r} S(n, k)$$

Število $S_0(n, n)$ ustreza številu vseh razbitij dane množice. Pravimo mu tudi Bellovo število in označimo z $B(n)$ ali B_n.

Porazdelitve n označenih elementov v r označenih celic

Če so celice lahko tudi prazne, lahko vsak element $a \in A$ postavimo v katerokoli od r celic. Torej imamo pri vsakem r možnih izbir. Po pravilu produkta je tedaj število vseh porazdelitev

$$r^n$$

Kaj pa, če so celice neprazne? Tedaj najprej porazdelimo elemente v r neoznačenih nepraznih celic, kar lahko naredimo na $S(n, r)$ načinov, nato pa celice še označimo (uredimo), kar lahko naredimo na $r!$ načinov. Po pravilu produkta je število vseh porazdelitev

$$r! \cdot S(n, r)$$

Porazdelitve n neoznačenih elementov v r neoznačenih celic

Te porazdelitve so enakovredne razbitjem števila n – zapisom števila n kot vsote naravnih števil $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_r = n$, ki so urejena v padajočem vrstnem redu

$$n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \ldots \geq n_r$$

Zahtevo, da so celice neprazne, izrazimo s pogojem $n_r > 0$. Razbitje lahko tudi grafično ponazorimo s Ferrersovim diagramom, ki ga dobimo tako, da v i-ti vrsti narišemo n_i kvadratkov ali pik. Tako razbitju $15 = 7 + 3 + 2 + 2 + 1$ ustreza Ferrersov diagram

□□□□□□□
□□□
□□
□□
□

Števila vseh zapisov

Označimo

> *$p(n)$ = število vseh zapisov števila n kot vsote naravnih števil;*
> *$p(n;k)$ = število vseh zapisov števila n kot vsote k neničelnih naravnih števil.*

Tedaj je očitno

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p(n;k)$$

Števila $p(n;k)$

Kako pa dobimo števila $p(n;k)$? Poskusimo dobiti zveze, ki bi nam omogočale izračun teh števil. Iz definicije izhajajo enakosti:

1. $p(n;1) = p(n;n) = 1$
2. $p(n;k) = 0, \quad k > n$

Vzemimo sedaj neko razbitje števila n na k neničelnih števil

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

Odštejmo 1 od vsakega števila iz razbitja. Dobili smo razbitje števila $n-k$ na največ k neničelnih števil:

$$\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n - k$$

Števila $p(n; k)$

Po pravilu vsote zato velja

3. $$p(n; k) = \sum_{i=1}^{k} p(n-k; i)$$

oziroma drugače zapisano

3'. $$p(n; k) = p(n-k; k) + p(n-1; k-1), \quad n \geq k > 1$$

Te tri zveze pa nam že omogočajo sestaviti tabelo prvih nekaj števil $p(n; k)$ in $p(n)$.

Tabela števil $p(n;k)$ in $p(n)$

(k,n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	1	2	2	3	3	4	4	5
3			1	1	2	3	4	5	7	8
4				1	1	2	3	5	6	9
5					1	1	2	3	5	7
6						1	1	2	3	5
7							1	1	2	3
8								1	1	2
9									1	1
10										1
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

Števila $p(n; k)$ in $p(n)$

Za števili $p(n; k)$ in $p(n)$ veljata oceni

$$p(n; k) \approx \frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1}$$

in Hardy-Ramanujanova ocena

$$p(n) \approx \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

Ferrersove diagrame lahko uporabimo za dokazovanje cele vrste lastnosti razbitij števil, kakršna je naslednja:

> *Število razbitij števila n, v katerih je $n_1 = k$ je enako $p(n; k)$.*

Izbori

Variacije

Kombinacije

Porazdelitve

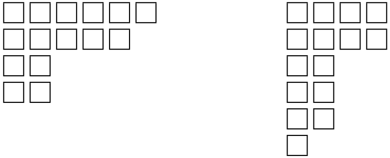
Metoda tirov

Povzetek

Pridružena razbitja

V trditev se prepričamo takole. Vsakemu razbitju števila n na k neničelnih števil priredimo pridruženo razbitje, ki ga dobimo tako, da dano razbitje prezrcalimo čez diagonalo. Tako na primer je razbitju $15 = 6+5+2+2$ pridruženo razbitje $15 = 4+4+2+2+2+1$.

$15 = 6+5+2+2$ $\qquad$ $15 = 4+4+2+2+2+1$



Preslikava razbitja v pridruženo razbitje je bijekcija. Ker sestavlja Ferrersove diagrame razbitij k neničelnih vrstic, sestavlja Ferrersove diagrame pridruženih razbitij po k stolpcev – torej je zanje $n_1 = k$. Trditev velja.

Števila $p(n; k)$

Odgovorimo še na začetni vprašanji:

- število porazdelitev n neoznačenih elementov v r nepraznih neoznačenih celic je enako $p(n; r)$;

od tu pa po pravilu vsote izhaja še:

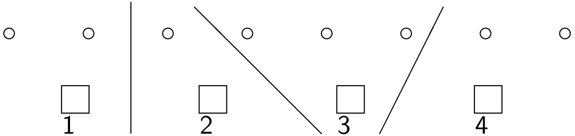
- število porazdelitev n neoznačenih elementov v r (lahko praznih) neoznačenih celic je enako

$$\sum_{k=1}^{r} p(n; k)$$

Porazdelitve n neoznačenih elementov v r označenih celic

Izbori
Variacije
Kombinacije
Porazdelitve
Metoda tirov
Povzetek

Tudi te porazdelitve lahko predstavimo kot zapise števila n kot vsote r naravnih števil, pri čemer pa je vrstni red členov pomemben. Preštejmo najprej porazdelitve v neprazne celice. Problem je enakovreden vprašanju (glej sliko): na koliko načinov lahko potegnemo $r-1$ črt, ki določijo vsebino posamezne celice?



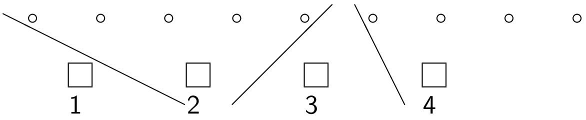
Ali drugače povedano (o␣o | o | o␣o␣o | o␣o)

> *na koliko načinov lahko izmed $n-1$ mest izberemo $r-1$ mest?*

Odgovor že poznamo: na $\binom{n-1}{r-1}$ načinov.

Porazdelitve, celice so lahko prazne

Če so dovoljene tudi prazne celice, si lahko porazdelitve še vedno ponazorimo s črtami:



le, da imamo manj omejitev. Vsako porazdelitev lahko zapišemo kot zaporedje 0 in 1. Na primer zgornjo 100000110000. Torej lahko vprašanje enakovredno zastavimo takole:

> *Na koliko načinov lahko postavimo v vrsto n ničel in $r-1$ enic?*

Tudi v tem primeru že poznamo odgovor: na $\binom{n+r-1}{n}$ načinov.

Porazdelitve n elementov sestave $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ v r označenih celic

Recimo, da imamo n elementov; od tega p_1 vrste 1, p_2 vrste 2, $\ldots$, p_k vrste k. Seveda je $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$. Na koliko načinov jih lahko porazdelimo po r označenih celicah, če elemente iste vrste med seboj ne razlikujemo? Celice so lahko prazne.

Naštejmo za primer vse porazdelitve 5 elementov sestave $(2, 1)$ v 3 celice. Označimo elemente vrste 1 z a in elemente vrste 2 z b:

$$
\begin{array}{llllll}
([aab],[],[]), & ([aa],[b],[]), & ([aa],[],[b]), & ([ab],[a],[]), & ([a],[ab],[]), & ([a],[a],[b]), \\
([ab],[],[a]), & ([a],[b],[a]), & ([a],[],[ab]), & ([b],[aa],[]), & ([],[aab],[]), & ([],[aa],[b]), \\
([b],[a],[a]), & ([],[ab],[a]), & ([],[a],[ab]), & ([b],[],[aa]), & ([],[b],[aa]), & ([],[],[aab])
\end{array}
$$

Vseh porazdelitev je 18.

Porazdelitve n elementov sestave $(p_1, p_2, \dots, p_k)$

Iz primera tudi vidimo, kako jih preštejemo. Elemente vrste i lahko neodvisno od ostalih porazdelimo po r celicah, kakor smo malo prej videli, na $\binom{p_i+r-1}{p_i}$ načinov. Zato je po pravilu produkta število vseh porazdelitev enako

$$\prod_{i=1}^{k} \binom{p_i + r - 1}{p_i}$$

Permutacije vrste $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$

Kot vemo lahko vsako permutacijo zapišemo kot produkt ciklov. Naj p_i označuje število ciklov dolžine i v permutaciji π. Potem pravimo, da je permutacija vrste $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Očitno števila p_i zadoščajo enakosti

$$\sum_{i=1}^{n} i.p_i = n$$

Množico vseh permutacij množice A vrste $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ označimo $\mathcal{P}(A; p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ali, da se izognemo naštevanju ničel, tudi

$$\mathcal{P}(A; 1^{p_1} 2^{p_2} \cdots n^{p_n})$$

pri čemer člene z eksponentom 0 izpustimo. Preštejmo jih!
Vzemimo neko permutacijo iz $\mathcal{P}(n; p_1, p_2, \ldots, p_n)$ in jo zapišimo v obliki ciklov. Kakor vemo, cikli komutirajo. Zato jih lahko uredimo po naraščajočih dolžinah. Torej vse permutacije dane vrste zadoščajo istemu kalupu. Vrsti $1^2 2^3 5^1$ ustreza kalup:

$$(\_)(\_)(\_\ \_)(\_\ \_)(\_\ \_)(\_\ \_\ \_\ \_\ \_)$$

Permutacije vrste $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$

Če na zaporedna prosta mesta kalupa postavimo elemente permutacije iz $\mathcal{P}(n)$, dobimo permutacijo dane vrste. Tako lahko dobimo vsako permutacijo dane vrste, toda običajno na več načinov. Katere so enake? Upoštevati moramo:

- vrstni red ciklov iste dolžine lahko spreminjamo. To nam da faktor
$$p_1!\, p_2!\, p_3! \cdots p_n!$$
- elemente vsakega cikla lahko še krožno vrtimo; določimo ga tako, da izberemo začetek. Pri ciklu dolžine i je to mogoče na i načinov. To da faktor
$$1^{p_1} 2^{p_2} 3^{p_3} \cdots n^{p_n}$$

Permutacije vrste $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$

Torej velja po pravilu produkta:

$$P(n; p_1, p_2, \ldots, p_n) \cdot p_1!\, p_2! \cdots p_n!\, 1^{p_1} 2^{p_2} \cdots n^{p_n} = P(n)$$

ali končno

$$P(n; p_1, p_2, \ldots, p_n) = \frac{n!}{p_1!\, p_2! \cdots p_n!\, 1^{p_1} 2^{p_2} \cdots n^{p_n}}$$

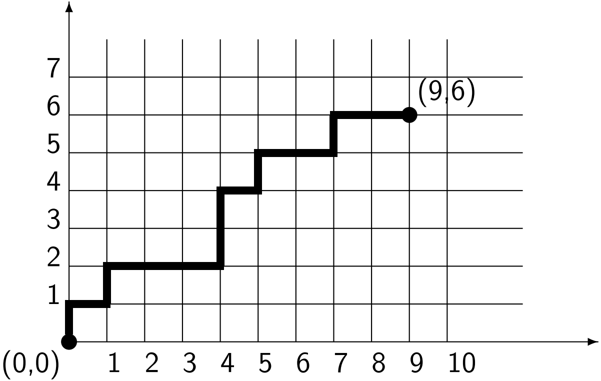
Metoda tirov

Večkrat lahko za dano kombinatorično nalogo najdemo "geometrijsko" predstavitev, ki prevede reševanje naloge na preštetje števila poti (tirov) ki zadoščajo pogojem naloge. Najprej si oglejmo preprosto nalogo.

Poti po mreži

Na koliko načinov lahko po celoštevilski mreži pridemo iz točke $(0, 0)$ v točko (m, n), če se lahko premikamo le navzgor (N) in desno (D) v sosednji točki.
Vsako možno pot iz točke $(0, 0)$ v točko (m, n) lahko popišemo z zaporedjem sestavljenim iz m znakov D in n znakov N. Tiru na sliki pripada zaporedje $NDNDDDNNDNDDNDD$. In vsakemu takemu zaporedju ustreza pot po mreži iz točke $(0, 0)$ v točko (m, n).

Poti po mreži



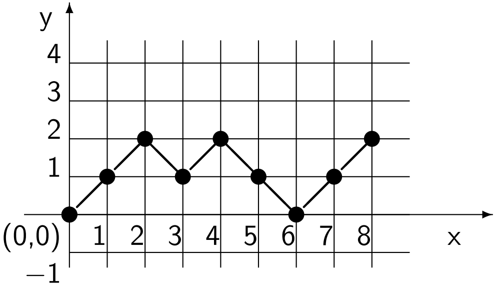
Torej je število poti enako številu takih zaporedij – te pa znamo prešteti: $\binom{n+m}{n}$ jih je.

Kupci pred blagajno

Pred blagajno se je zbralo $m + n$ ljudi, $n \leq m$, ki želijo kupiti listek po 5 donarjev. m jih ima kovanec za 5 donarjev, n pa kovanec za 10 donarjev. Na začetku je blagajna prazna. Koliko je različnih razporeditev ljudi v vrsto, tako, da bo blagajničarka lahko vsakemu takoj vrnila denar? Ljudi, ki imajo enak kovanec med seboj ne razlikujemo.

Vsako vrsto pred blagajno lahko opišemo z zaporedjem dolžine $m + n$ sestavljenim iz m P-jev (Pet) in n D-jev (Deset); prav tako pa jo lahko predstavimo kot pot po celoštevilski mreži, pri čemer os x šteje kupce, os y pa število kovancev za 5 donarjev v blagajni. Tedaj P pomeni premik za $(1, 1)$, D pa premik za $(1, -1)$.

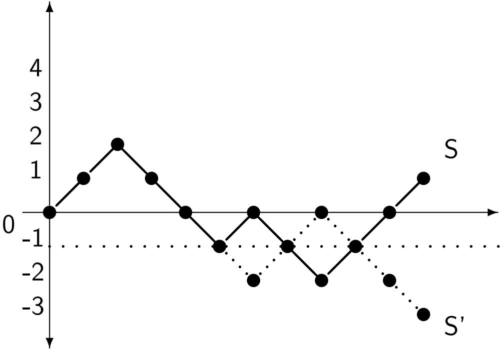
Kupci pred blagajno



Tiru na sliki ustreza zaporedje kupcev *PPDPDDPP*.
Vsega je $\binom{m+n}{n}$ poti. Vse se končajo v točki $(m+n, m-n)$.
Toda vse ne zadoščajo pogojem naloge. Tako na primer pot, ki ustreza zaporedju *PDDPPPDP* zaide pod os x – blagajničarka ne more vrniti denarja.
Pogojem naloge zadoščajo samo poti, ki ne zaidejo pod os x.
Preštejmo, koliko jih zaide pod os x!

Kupci pred blagajno

Za to vsaki poti S, ki zaide pod os x priredimo pot S', ki se s potjo S ujema do prve skupne točke s premico $y = -1$, od tu naprej pa je njena zrcalna podoba glede na $y = -1$.



Vse prirejene poti končajo v točki $(m + n, n - m - 2)$.

Kupci pred blagajno

Preslikava, ki poti S, ki ima skupno točko s premico $y = -1$, priredi pot S' iz točke $(0,0)$ v točko $(m+n, n-m-2)$ je bijekcija. Torej je število neustreznih poti enako številu vseh poti iz točke $(0,0)$ v točko $(m+n, n-m-2)$. Koliko je takih poti?
Naj taki poti pripadajoče zaporedje vsebuje p P-jev in d D-jev. Tedaj velja:

$$d + p = m + n \qquad \text{in} \qquad d - p = m + 2 - n$$

Od tu dobimo $d = m + 1$ in $p = n - 1$. Torej je število neustreznih poti enako:

$$\binom{d+p}{d} = \binom{m+n}{m+1}$$

in končno število ustreznih poti:

$$\binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{m+1} = \frac{m+1-n}{m+1}\binom{m+n}{m}$$

Izbori reda r iz n elementov

Urejenost pomembna	Ponavljanje dovoljeno	Ime	število
NE	NE	kombinacije	$\binom{n}{r}$
NE	DA	kombinacije s ponavljanjem	$\binom{n+r-1}{r}$
DA	NE	variacije	$\frac{n!}{(n-r)!}$
DA	DA	variacije s ponavljanjem	n^r

Porazdelitve n elementov v r celic

Označeni elementi	Označene celice	Celice so lahko prazne	število
NE	NE	NE	$p(n,r)$
NE	NE	DA	$\sum_{k=0}^{r} p(n,r)$
NE	DA	NE	$\binom{n-1}{r-1}$
NE	DA	DA	$\binom{n+r-1}{n}$
DA	NE	NE	$S(n,r)$
DA	NE	DA	$\sum_{k=1}^{r} S(n,k)$
DA	DA	NE	$r!S(n,r)$
DA	DA	DA	r^n