Diskretna matematika 1 / Kombinatorika

3. Pravilo vključitev in izključitev

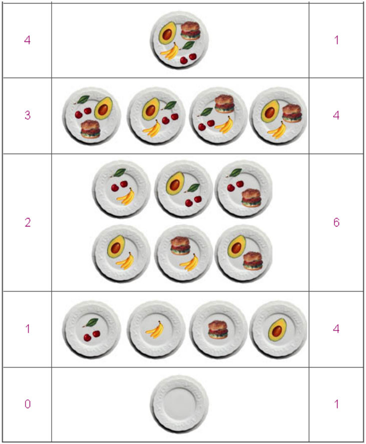
Vladimir Batagelj

Univerza v Ljubljani

FMF, matematika – Finančna matematika

Ljubljana, november 2013 / februar 2008

Kazalo



Math fun: Pascal triangle

Učilnica: http://ucilnica.fmf.uni-lj.si/course/view.php?id=39

Različica: 19. november 2013

Osnove

V teoriji množic smo spoznali, da velja za končni množici A in B enakost:

$$\mathrm{m}(A) + \mathrm{m}(B) = \mathrm{m}(A \cup B) + \mathrm{m}(A \cap B)$$

oziroma

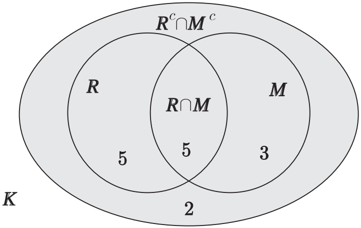
$$\mathrm{m}(A \cup B) = \mathrm{m}(A) + \mathrm{m}(B) - \mathrm{m}(A \cap B)$$

in, če je $B \subseteq A$

$$\mathrm{m}(A \setminus B) = \mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(B)$$

Ti enakosti lahko uporabimo pri reševanju naslednje naloge.

Zgled: knjige 1



Na polici je 15 knjig, od tega jih je 10 z rdečimi platnicami; 8 je matematičnih; 5 matematičnih knjig ima rdeče platnice. Koliko nematematičnih knjig nima rdečih platnic?

$$\mathrm{m}(R^c \cap M^c) = \mathrm{m}((R \cup M)^c) =$$

$$\mathrm{m}(K \setminus (R \cup M)) = \mathrm{m}(K) - \mathrm{m}(R \cup M) =$$

$$\mathrm{m}(K) - \mathrm{m}(R) - \mathrm{m}(M) + \mathrm{m}(R \cap M) = 15 - 10 - 8 + 5 = 2$$

Zgled: knjige 2

Na polici so knjige. O njih vemo naslednje (glede na tri lastnosti: debelost, jezik, snov):

- vsaka knjiga ima vsaj eno od teh treh lastnosti;
- 20 knjig je debelih; 12 izmed njih je v slovenščini, od tega samo 1 matematična;
- na polici je vsega 24 slovenskih knjig, od tega 12 matematičnih;
- vseh matematičnih knjig je 17 , od tega 6 debelih.

Koliko knjig je na polici?
Označimo množice knjig z D, S, M. Naloga sprašuje po $\mathrm{m}(D \cup S \cup M)$.

...Zgled: knjige 2

Preden nadaljujemo, posplošimo enakost z začetka poglavja na tri množice:

$$\mathrm{m}(A \cup B \cup C) = \mathrm{m}(A \cup (B \cup C)) =$$

$$\mathrm{m}(A) + \mathrm{m}(B \cup C) - \mathrm{m}((A \cap (B \cup C))$$

$$= \mathrm{m}(A) + \mathrm{m}(B) + \mathrm{m}(C) - \mathrm{m}(B \cap C) - \mathrm{m}((A \cap B) \cup (A \cap C))$$

$$= \mathrm{m}(A) + \mathrm{m}(B) + \mathrm{m}(C) -$$

$$- \mathrm{m}(B \cap C) - \mathrm{m}(A \cap B) - \mathrm{m}(A \cap C) + \mathrm{m}(A \cap B \cap C)$$

Torej je:

$$m = \mathrm{m}(D \cup S \cup M) = \mathrm{m}(D) + \mathrm{m}(S) + \mathrm{m}(M) -$$

$$- \mathrm{m}(D \cap S) - \mathrm{m}(D \cap M) - \mathrm{m}(S \cap M) + \mathrm{m}(D \cap S \cap M)$$

$$= 20 + 24 + 17 - (12 + 12 + 6) + 1 = 32$$

Pravilo vključitev in izključitev

Primera lahko posplošimo v obrazec – pravilo vključitev in izključitev:

$$\mathrm{m}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{C \in \mathcal{C}(n,i)} \mathrm{m}(\bigcap_{k \in C} A_k)$$

Dokazujemo s popolno indukcijo. Za $n = 2, 3$ je trditev že dokazana v obeh primerih. Poglejmo si še indukcijski korak:

$$\mathrm{m}(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = \mathrm{m}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}) =$$

$$\mathrm{m}(A_{n+1}) + \mathrm{m}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) - \mathrm{m}(A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i)$$

...Pravilo vključitev in izključitev – dokaz

Poglejmo si zadnji člen pobliže. Označimo:

$$\mathcal{C}(n,i)\nabla(n+1) = \{C \cup \{n+1\} : C \in \mathcal{C}(n,i)\}$$

pa lahko nadaljujemo

$$\mathrm{m}(A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \mathrm{m}(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap A_{n+1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \sum_{C\in\mathcal{C}(n,i)} \mathrm{m}(\bigcap_{k\in C}(A_k \cap A_{n+1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \sum_{C\in\mathcal{C}(n,i)\nabla(n+1)} \mathrm{m}(\bigcap_{k\in C} A_k)$$

. . . Pravilo vključitev in izključitev – dokaz

oziroma

$$\mathrm{m}(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = \mathrm{m}(A_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \sum_{C\in\mathcal{C}(n,i)} \mathrm{m}(\bigcap_{k\in C} A_k) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \sum_{C\in\mathcal{C}(n,i)\nabla(n+1)} \mathrm{m}(\bigcap_{k\in C} A_k)$$

in od tu, če upoštevamo

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(n, i+1) \cup \mathcal{C}(n, i)\nabla(n+1) &= \mathcal{C}(n+1, i+1) \\ \mathcal{C}(n+1, 0)\nabla(n+1) &= \{\{n+1\}\} \end{aligned}$$

končno

$$\mathrm{m}(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1} \sum_{C\in\mathcal{C}(n+1,i)} \mathrm{m}(\bigcap_{k\in C} A_k)$$

kar je bilo treba pokazati.

...Pravilo vključitev in izključitev

Pogosto zapišemo pravilo vključitev in izključitev še v naslednji obliki: Naj bo S univerzalna množica (področje pogovora). Označimo $A^c = S \setminus A$. Tedaj, kot vemo, velja:

$$(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \qquad \text{in} \qquad (\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$$

ter $\mathrm{m}(A^c) = \mathrm{m}(S) - \mathrm{m}(A)$. Od tu pa, če upoštevamo:

$$C(n,0) = \{\emptyset\} \qquad \text{in} \qquad \bigcap_{k \in \emptyset} A_k = S$$

dobimo po pravilu vključitev in izključitev:

$$\mathrm{m}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c) = \mathrm{m}(S) - \mathrm{m}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{C \in \mathcal{C}(n,i)} \mathrm{m}(\bigcap_{k \in C} A_k)$$

...Pravilo vključitev in izključitev

Zapomnimo si ga takole

$$\mathrm{m}(A^c B^c C^c) = \mathrm{m}((1-A)(1-B)(1-C)) =$$

$$= m - \mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(B) - \mathrm{m}(C) + \mathrm{m}(AB) + \mathrm{m}(AC) + \mathrm{m}(BC) - \mathrm{m}(ABC)$$

Zgled: deljivost

Koliko števil med 1 in $N = 100(1000000)$ je deljivih z 12 in hkrati niso deljiva z nobenim izmed števil 10, 15 in 21 ?
Vpeljimo naslednje množice:

A – števila deljiva z 12
B – števila deljiva z 10
C – števila deljiva z 15
D – števila deljiva z 21

Upoštevajmo še

$$\mathrm{m}(\{n \in \mathbb{N} : n \leq N \wedge a_i | n, i = 1, 2, \ldots, k\}) =$$

$$= \left\lfloor \frac{N}{\mathrm{lcm}(a_1, a_2, \ldots a_k)} \right\rfloor$$

kjer je lcm najmanjši skupni večkratnik.

…Zgled: deljivost

Če uporabimo 'simbolični' zapis pravila vključitev in izključitev, je iskano število: $\mathrm{m}(AB^cC^cD^c) = \mathrm{m}(A(1-B)(1-C)(1-D)) =$

$$= \mathrm{m}(A) - \mathrm{m}(AB) - \mathrm{m}(AC) - \mathrm{m}(AD) + \mathrm{m}(ABC) + \mathrm{m}(ABD) + \mathrm{m}(ACD) - \mathrm{m}(ABCD)$$

$$= \left\lfloor \frac{N}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{60} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{60} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{84} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{60} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{420} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{420} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{420} \right\rfloor$$

$$= \left\lfloor \frac{N}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{420} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{60} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{84} \right\rfloor$$

In v posebnih primerih: za $N = 100$ je:
$\mathrm{m}(AB^cC^cD^c) = 8 + 0 - 1 - 1 = 6$
ustrezna števila so: $12, 14, 36, 48, \mathbf{60}, 72, \mathbf{84}, 96$.
Za $N = 1000000$ pa dobimo:

$$\mathrm{m}(AB^cC^cD^c) = 83333 + 2380 - 16666 - 11904 = 57143$$

Zgled: permutacije

Koliko je permutacij reda n, ki ne pribijejo (fiksirajo) nobenega elementa?
Vpeljemo množice: $A_k = \{\pi \in S_n : \pi(k) = k\}$. Tedaj je iskano število permutacij N enako:

$$N = \mathrm{m}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{C \in \mathcal{C}(n,i)} \mathrm{m}(\bigcap_{k \in C} A_k)$$

Naj bo $C \in \mathcal{C}(n, i)$, tedaj je očitno $\mathrm{m}(\bigcap_{k \in C} A_k) = (n - i)!$ in zato

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{C \in \mathcal{C}(n,i)} (n-i)! \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (n-i)! \binom{n}{i} = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \approx \frac{n!}{e} \end{aligned}$$

Zgled: Stirlingova števila druge vrste

Poglejmo še enkrat vprašanje:

> *Na koliko različnih načinov lahko postavimo n različnih predmetov v r različnih predalčkov, ne da bi ostal kakšen prazen?*

Označimo iskano število z N. Kot vemo, je odgovor $N = r!S(n, r)$. Poglejmo sedaj še, kaj nam da pravilo vključitev in izključitev. Postavimo:

> $A_k \equiv$ množica porazdelitev, pri katerih je k-ti predalček prazen

tedaj je očitno

$$N = \mathrm{m}\left(\bigcap_{k=1}^{r} A_k^c\right) = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i \sum_{C \in \mathcal{C}(r,i)} \mathrm{m}\left(\bigcap_{k \in C} A_k\right)$$

...Zgled: Stirlingova števila druge vrste

Upoštevajmo, da pri izbranem $C \in \mathcal{C}(r, i)$, ker je i predalčkov praznih, porazdelimo predmete po preostalih $r - i$ predalčkih; in je zato

$$\mathrm{m}\left(\bigcap_{k \in C} A_k\right) = (r - i)^n$$

Tako dobimo

$$N = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} (r - i)^n = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} i^n$$

Združimo oba izraza za N in že imamo obrazec za izračun Stirlingovih števil druge vrste:

$$S(n, r) = \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} i^n$$

Zgled: Eulerjeva funkcija in Möbiusova funkcija

Označimo za dano naravno število $n \in \mathbb{N}^+$:

$$\Phi(n) = \{q \in \mathbb{N}^+ : q \leq n \wedge \gcd(q, n) = 1\}$$

Torej vsebuje $\Phi(n)$ vsa naravna števila med 1 in n, ki so si tuja z n. Moči množic $\Phi(n)$ določajo Eulerjevo funkcijo:

$$\varphi(n) = \mathrm{m}(\Phi(n))$$

Kako izračunamo $\varphi(n)$? Kakor vemo lahko vsako naravno število n zapišemo v obliki:

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

kjer so p_i različna praštevila in $\alpha_i \geq 1$. Vpeljimo množice:

$$A_i = \{q \in \mathbb{N}^+ : q \leq n \wedge p_i | q\}$$

...Zgled: Eulerjeva funkcija in Möbiusova funkcija

Tedaj je

$$\Phi(n) = \bigcap_{i=1}^{k} A_i^c$$

in zato po pravilu vključitev in izključitev

$$\varphi(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sum_{C \in \mathcal{C}(k,i)} \mathrm{m}(\bigcap_{j \in C} A_j)$$

Ker je $\bigcap_{j \in C} A_j = \{q \in \mathbb{N}^+ : q \leq n \wedge \bigwedge_{j \in C} (p_j | q)\} = \{q \in \mathbb{N}^+ : q \leq n \wedge (\prod_{j \in C} p_j) | q\}$ je

$$\mathrm{m}(\bigcap_{j \in C} A_j) = \frac{n}{\prod_{j \in C} p_j}$$

. . . Zgled: Eulerjeva funkcija in Möbiusova funkcija

in dalje $$\varphi(n) = n\sum_{i=1}^{k}(-1)^i \sum_{C\in\mathcal{C}(k,i)} \prod_{j\in C} \frac{1}{p_j} = n\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i})$$

Izračunajmo za primer $\varphi(60)$. Ker je $60 = 2^2.3.5$, je

$$\varphi(60) = 60\cdot(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{5}) = 16$$

Res,
$\Phi(60) = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59\}$.

... Zgled: Eulerjeva funkcija in Möbiusova funkcija

Obrazec za $\varphi(n)$ lahko zapišemo še drugače, če uvedemo Möbiusovo funkcijo

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & p^2 | n, p \text{ je praštevilo} \\ (-1)^k & n = p_1 p_2 \cdots p_k \end{cases}$$

Tedaj lahko zapišemo

$$\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

... Zgled: Eulerjeva funkcija in Möbiusova funkcija

Za Möbiusovo funkcijo velja:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0, \qquad n > 1$$

V to se prepričamo takole.
Zapišemo n kot produkt praštevil $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i > 0$; tedaj ima vsak delitelj d obliko:

$$d = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}, \qquad \alpha_i \geq \beta_i \geq 0$$

No, če je kak $\beta_i > 1$, je $\mu(d) = 0$.

. . . Zgled: Eulerjeva funkcija in Möbiusova funkcija

Torej k vsoti prispevajo le členi, za katere ima d obliko:

$$d = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}, \qquad \beta_i \in \{0, 1\}$$

To naprej pomeni, da vsaka kombinacija iz praštevil $p_1, \ldots, p_k$ določa delitelj. Njihovi prispevki vsoti pa so

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} = 0$$

S tem je trditev dokazana.

Möbiusova inverzija

Za Möbiusovo funkcijo velja še naslednja zanimiva lastnost – Möbiusova inverzija:
Naj bo funkcija g definirana na naravnih številih in je funkcija f dobljena iz g po obrazcu

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

Tedaj lahko g dobimo iz f po obrazcu

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$$

. . . Möbiusova inverzija – dokaz

Pokazati moramo, da je vrednost desne strani zadnje zveze enaka levi. Poskusimo:

$$\sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \sum_{c|\frac{n}{d}} \mu(d) g(c)$$

Kakor vemo, lahko zamenjamo vrstni red sumiranja in dobimo

$$= \sum_{c|n} g(c) \sum_{d|\frac{n}{c}} \mu(d)$$

Notranja vsota je enaka 0 za vse $c < n$. Tako ostane le še indeks $c = n$:

$$= \sum_{c=n} g(c) \sum_{d|1} \mu(d) = g(n)\mu(1) = g(n)$$

Opomba: Izrek velja tudi v obratno smer.

Posledice

Poglejmo še nekaj posledic pravila vključitev in izključitev. Označimo:

$$s(0) = \mathrm{m}(S)$$

in

$$s(i) = \sum_{C \in \mathcal{C}(n,i)} \mathrm{m}(\bigcap_{k \in C} A_i), \qquad i > 0$$

Tedaj velja izrek:
Število elementov, ki vstopajo natanko v p izmed množic $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je enako

$$N(p) = \sum_{i=p}^{n} (-1)^{i-p} \binom{i}{p} s(i)$$

Dokaz izreka

Elementi, ki nastopajo natanko v p izmed množic so šteti po enkrat v $s(p)$.
Vsak element, ki vstopa v največ $p+j, j > 0$ množic pa je štet

$$\binom{p+j}{p+r}$$

krat v $s(p+r)$, $0 \le r \le j$. Torej k $N(p)$ prispeva skupaj

$$K = \sum_{r=p}^{p+j} (-1)^{r-p} \binom{r}{p} \binom{p+j}{r}$$

Upoštevajmo, da velja

$$\binom{r}{p}\binom{p+j}{r} = \binom{p+j}{p}\binom{j}{r-p}$$

... Dokaz izreka

pa imamo končno

$$K = \binom{p+j}{p} \sum_{r=p}^{p+j} (-1)^{r-p} \binom{j}{r-p} =$$

$$= \binom{p+j}{p} \sum_{r=0}^{j} (-1)^{r} \binom{j}{r} = 0$$

S tem je izrek dokazan.

Iz zadnjega izreka dobimo zanimivo posledico.

Število elementov v sodih množicah

Sestavimo običajno rodovno funkcijo števil $N(p)$:

$$G(x) = \sum_{p=0}^{n} N(p)\, x^p = \sum_{p=0}^{n} \sum_{i=p}^{n} (-1)^{i-p} \binom{i}{p} s(i) x^p$$

in upoštevajmo naslednjo lastnost končnih vsot $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} a(i,j) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} a(i,j)$ pa lahko nadaljujemo:

$$G(x) = \sum_{i=0}^{n} s(i) \sum_{p=0}^{i} \binom{i}{p} x^p (-1)^{i-p} = \sum_{i=0}^{n} s(i)(x-1)^i$$

Torej je $G(1) = s(0) = \sum_{i=0}^{n} N(i)$ in
$G(-1) = \sum_{i=0}^{n} s(i)(-2)^i = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i N(i)$. Od tu dobimo obrazec za število elementov, ki nastopajo v sodo množicah:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} N(2i) = \frac{1}{2}(s(0) + \sum_{i=0}^{n} (-2)^i s(i))$$