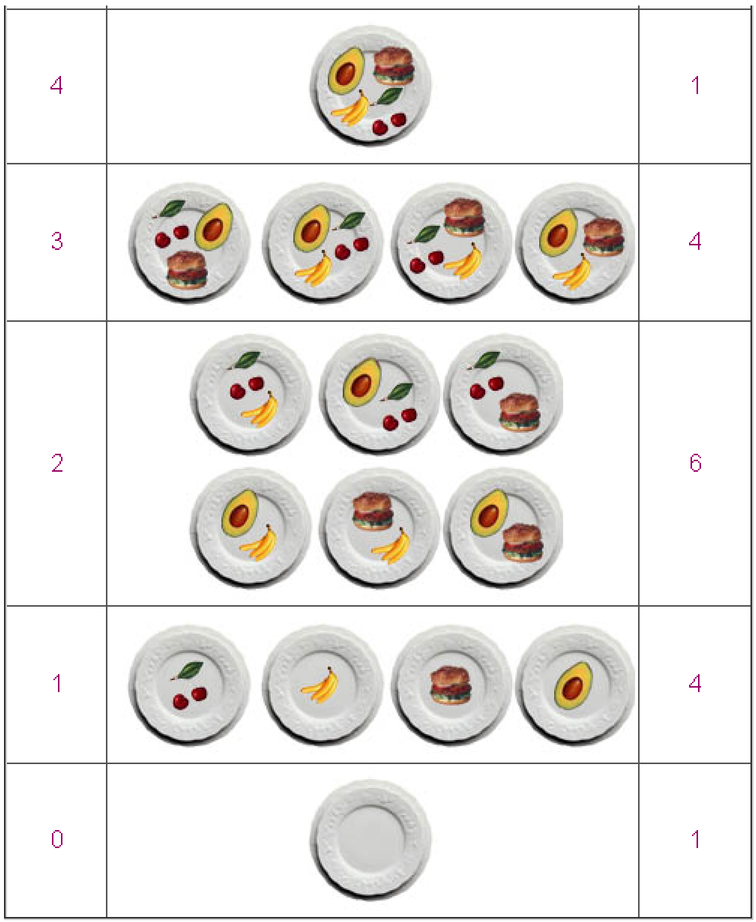

Math fun: Pascal triangle

FMF Matematika
Finančna matematika

Kombinatorika
Reševanje rekurzivnih enačb in rodovne funkcije

Vladimir Batagelj

Ljubljana, april 2008
4. Dec 2012

Kazalo

Reševanje rekurzivnih enačb in rodovne funkcije

Rodovne funkcije se izkažejo kot močno orodje pri reševanju rekurzivnih enačb. Da je temu res tako, in kako jih uporabimo, je razvidno iz naslednjih zgledov.

Že na začetku pa velja pripomniti, da smo z računskega stališča pogosto čisto zadovoljni kar s samo rekurzivno enačbo. Večkrat so rešitve v obliki obrazca računsko celo vprašljive zaradi zaokrožitvenih napak; pomembne pa so pri analizi obnašanja danega zaporedja.

Zaporedju $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ priredimo (običajno) *rodovno funkcijo*

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

... Reševanje rekurzivnih enačb in rodovne funkcije

Z uporabo rekurzivne enačbe izpeljemo, da je

$$A(x) = B(x)$$

kjer je $B(x)$ nek izraz/funkcija spremenljivke x. Funkcijo $B(x)$ nato "razvijemo v vrsto" – zapišemo v obliki

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

Ker je $A(x) = B(x)$ natanko takrat, ko za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $a_k = b_k$, nam izrazi za b_k določajo rešitev dane rekurzivne enačbe.

Produkt zaporedij

Naj bosta $\mathbf{a} = (a_i)$ in $\mathbf{b} = (b_i)$ zaporedji ter $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ in $B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ pripadajoči rodovni funkciji. Postavimo

$$C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = A(x) \cdot B(x)$$

Tedaj je $C(x)$ rodovna funkcija zaporedja $\mathbf{c} = (c_i)$ določenega s predpisom

$$c_i = \sum_{u+v=i} a_u b_v = \sum_{u=0}^{i} a_u b_{i-u}, \qquad i \geq 0$$

Zaporedje $\mathbf{c}$ imenujemo (običajni) *produkt zaporedij* $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ in zapišemo $\mathbf{c} = \mathbf{a} * \mathbf{b}$.

Kombinacije s ponavljanji

Število kombinacij s ponavljanji, pri čemer izbiramo r elementov iz množice z n elementi, smo označili s $\bar{C}(n, r)$. Očitno je za $n > 0$ in $r \geq 0$

$$\bar{C}(n, 1) = n \quad \text{in} \quad \bar{C}(1, r) = 1$$

Vzemimo sedaj poljubno kombinacijo s ponavljanji in nek element množice, iz katere izbiramo. Nastopita dve izključujoči se možnosti:

- kombinacija vsebuje ta element: takih kombinacij je $\bar{C}(n, r-1)$
- kombinacija ne vsebuje ta element: takih kombinacij je $\bar{C}(n-1, r)$

Po pravilu vsote potemtakem velja:

$$\bar{C}(n, r) = \bar{C}(n, r-1) + \bar{C}(n-1, r)$$

S temi tremi zvezami so števila $\bar{C}(n, r)$ natanko določena.

Kombinacije s ponavljanji

Zaradi enostavnejšega zapisa uvedimo oznako :

$$\bar{C}(n,r) = a_n^r$$

in prepišimo zveze:

$$a_n^1 = n, \quad a_1^r = 1$$

$$a_n^r = a_n^{r-1} + a_{n-1}^r$$

Tem enakostim lahko ”umetno” dodamo še:

$$a_n^0 = a_n^1 - a_{n-1}^1 = n - (n-1) = 1$$

Poskusimo sedaj določiti splošni člen a_n^r tega zaporedja. V ta namen vsakemu podzaporedju $a_n^0, a_n^1, \ldots, a_n^r, \ldots$ priredimo rodovno funkcijo

$$A_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_n^r \cdot x^r$$

Kombinacije s ponavljanji

Nadomestimo a_n^r v vsoti z desno stranjo rekurzivne zveze:

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} a_n^r x^r = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (a_n^{r-1} + a_{n-1}^r) x^r = \\ &= 1 + x \sum_{r=0}^{\infty} a_n^r x^r + \sum_{r=1}^{\infty} a_{n-1}^r x^r = \\ &= x A_n(x) + A_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Torej velja med dvema zaporednima rodovnima funkcijama zveza:

$$A_n(x) = \frac{A_{n-1}(x)}{1-x}$$

in je potemtakem

$$A_n(x) = A_1(x)(1-x)^{1-n}$$

Kombinacije s ponavljanji

Določimo še $A_1(x)$:

$$A_1(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_1^r x^r = \sum_{r=0}^{\infty} x^r = \frac{1}{1-x}$$

in imamo končno

$$A_n(x) = (1-x)^{-n}$$

oziroma, kakor že vemo

$$A_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_n^r x^r = (1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$$

S primerjavo koeficientov pri x^r iz zadnje enakosti razberemo končno rešitev:

$$\bar{C}(n,r) = a_n^r = \binom{n+r-1}{r}$$

Fibonaccijeva števila

V svoji knjigi *Liber abaci* je Leonardo iz Pise (Pisanski), znan kot Fibonacci (1175-1250), zastavil naslednji *zajčji problem*:

> Zajci se razmnožujejo po naslednjem pravilu: vsak zajčji par, ki je star vsaj dva meseca, prispeva vsak mesec k zajčjemu življu en nov zajčji par. Koliko parov bo štela zajčja družina, danes rojenega zajčjega para po n mesecih, če vsi preživijo?

Poglejmo si nekaj generacij v tabeli. Pri tem je posamezni zajčji par enolično podan z oznako $zw.n$ kjer število n pove mesec rojstva danega zajčjega para, oznaka zw pa označuje starše. Število zajcev po n mesecih označimo s F_n in mu pravimo n-to *Fibonaccijevo število*.

. . . Fibonaccijeva števila

mesec						
0	1	2	3	4	5	6
z0	z0	z0	z0	z0	z0	z0
		z0.2	z0.2	z0.2	z0.2	z0.2
			z0.3	z0.3	z0.3	z0.3
				z0.4	z0.4	z0.4
				z0.2.4	z0.2.4	z0.2.4
					z0.5	z0.5
					z0.2.5	z0.2.5
					z0.3.5	z0.3.5
						z0.6
						z0.2.6
						z0.3.6
						z0.4.6
						z0.2.4.6
1	1	2	3	5	8	13
število						

. . . Fibonaccijeva števila

Kako so ta števila med seboj povezana? Iz našega dosedanjega opazovanja zajčjega razmnoževanja vidimo, da sestavljajo zajčjo družino $\mathcal{F}_n$ po n mesecih vsi zajčji pari $\mathcal{F}_{n-1}$, ki so jo sestavljali prejšnji, $n-1$-ti, mesec; poveča pa se še za potomce $\mathcal{F}_{n-2}.n$ vseh tistih parov, ki so sestavljali zajčjo družino pred dvema mesecema. Ker vsak zajčji par prispeva en nov par je potemtakem za $n > 2$:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

S to rekurzivno enačbo in začetnima vrednostima $F_0 = F_1 = 1$ je zaporedje Fibonaccijevih števil natanko določeno. Rešimo jo.

. . . Fibonaccijeva števila

Prirejena rodovna funkcija je

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$$

in dalje

$$= 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} F_k x^k = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} (F_{k-1} + F_{k-2}) x^k$$

$$= 1 + x + x(F(x) - 1) + x^2 F(x) = 1 + (x + x^2) F(x)$$

oziroma

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

Za to, da bi dobili obrazec za F_n, moramo desno stran dobljene enakosti razviti v vrsto.

...Fibonaccijeva števila

To storimo takole. Najprej zapišemo

$$x^2 + x - 1 = (x - p)(x - q)$$

kjer je $p = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}), \quad q = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5})$ in $p + q = -1, \quad pq = -1, \quad p - q = \sqrt{5}$.

Nato pa razcepimo

$$\frac{1}{x^2 + x - 1} = \frac{1}{(x - p)(x - q)} = \frac{1}{p - q}(\frac{1}{x - p} - \frac{1}{x - q})$$

Spomnimo se še enakosti

$$\sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{1}{1 - y}, \quad |y| < 1$$

...Fibonaccijeva števila

pa vidimo, da smo na dobri poti, saj je

$$\frac{1}{x-a} = \frac{-1}{a(1-\frac{x}{a})} = -\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{x}{a})^k$$

Nadaljujmo:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k = \frac{-1}{x^2+x-1} = \frac{-1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{x-p} - \frac{1}{x-q}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{p^{k+1}} - \frac{1}{q^{k+1}})x^k \end{aligned}$$

od koder že lahko razberemo

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{p^{n+1}} - \frac{1}{q^{n+1}})$$

...Fibonaccijeva števila

Dobljeni izraz lahko še nekoliko poenostavimo, če upoštevamo: $\frac{1}{p} = -q$ in $\frac{1}{q} = -p$. Dobimo:

$$F_n = \frac{(-q)^{n+1} - (-p)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

in, ko vstavimo vrednosti za p in q, končno

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$$

oziroma, ker je $|\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})| = 0.61803 < 1$:

$$F_n \simeq \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}$$

Linearne rekurzivne enačbe s konstantnimi koeficienti

V tem razdelku bomo posplošili prijeme,ki smo jih uporabili pri Fibonaccijevih številih. *Linearna (homogena) rekurzivna enačba reda r s konstantnimi koeficienti* imenujeno rekurzivno enačbo oblike

$$a_{n+r} + b_1 a_{n+r-1} + b_2 a_{n+r-2} + \ldots + a_n b_r = 0, \quad n \geq 0$$

pri čemer poznamo prvih r členov zaporedja $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ in konstante $b_0 = 1, b_1, b_2, \ldots, b_r$, $b_r \neq 0$. Dana enačba nekoliko spominja na produkt zaporedij. Poglejmo ali lahko to izkoristimo. Zaporedjema a in b priredimo rodovni funkciji:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad \text{in} \qquad B(x) = \sum_{k=0}^{r} b_k x^k$$

... Linearne rekurzivne enačbe ...

Oglejmo si še produkt zaporedij $c = a \cdot b$ in pripadajočo rodovno funkcijo:

$$C(x) = A(x) \cdot B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

No, za $n \geq 0$ je

$$c_{n+r} = b_0 a_{n+r} + b_1 a_{n+r-1} + b_2 a_{n+r-2} + \cdots + b_r a_n = 0$$

Potemtakem je $C(x) = \sum_{k=0}^{r-1} c_k x^k$ polinom stopnje kvečjemu $r - 1$. Torej je

$$A(x) = C(x)/B(x)$$

racionalna funkcija. Izrazimo $B(x)$ z ničlami:

$$B(x) = b_r \prod_{k=1}^{s} (x - x_k)^{\alpha_k}$$

...Linearne rekurzivne enačbe ...

Ker je stopnja polinoma $C(x)$ manjša od stopnje polinoma $B(x)$, lahko, kakor vemo iz analize, funkcijo $A(x)$zapišemo v obliki

$$A(x) = \frac{C(x)}{B(x)} = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{\beta_{kj}}{(x - x_k)^j}$$

Razvijmo jo v vrsto. V ta namen predelajmo najprej posamezni "sumand":

$$\frac{\beta}{(x-a)^j} = \frac{\beta}{(-a)^j}.(1 - \frac{x}{a})^{-j} = \frac{\beta}{(-a)^j} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+j-1}{j-1})(\frac{x}{a})^i$$

in še posamezno delno vsoto:

$$\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{\beta_{kj}}{(x - x_k)^j} = \sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{\beta_{kj}}{(-x_k)^j}. \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+j-1}{j-1} (\frac{x}{x_k})^i =$$

$$= \quad \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{x}{x_k})^i . \sum_{j=1}^{\alpha_k} \binom{i+j-1}{j-1} \frac{\beta_{kj}}{(-x_k)^j} = \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{x}{x_k})^i \, P_k(i)$$

. . . Linearne rekurzivne enačbe . . .

kjer je $P_k(i)$ polinom stopnje največ $\alpha_k - 1$. Torej je:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=1}^{s} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{x_k})^n P_k(n) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{s} (\frac{1}{x_k})^n P_k(n)$$

od koder izhaja

$$a_n = \sum_{k=1}^{s} (\frac{1}{x_k})^n P_k(n)$$

Dobljeno rešitev lahko še nekoliko "popilimo", če upoštevamo, da so $\frac{1}{x_k}$ koreni (enake kratnosti kot x_k) polinoma

$$K(x) = x^r B(\frac{1}{x}) = x^r \sum_{k=0}^{r} b_k (\frac{1}{x})^k = \sum_{k=0}^{r} b_k x^{r-k} = \sum_{k=0}^{r} b_{r-k} x^k$$

ki mu zaradi njegovega pomena pri reševanju enačbe, pravimo *karakteristični polinom* enačbe. Tako lahko sklenemo:

…Linearne rekurzivne enačbe – izrek

IZREK 1 *Rešitev linearne homogene enačbe s konstantnimi koeficienti ima obliko (*)*

$$a_n = \sum_{k=1}^{s} P_k(n) x_k^n$$

pri čemer so x_k koreni karakterističnega polinoma

$$K(x) = \sum_{j=0}^{r} b_{r-j} x^j = \gamma \prod_{k=1}^{s} (x - x_k)^{\alpha_k}$$

in so $P_k(n)$ polinomi stopnje največ $\alpha_k - 1$.

Iz tega se ponuja naslednji recept za reševanje tovrstnih enačb:

- določi ničle karakterističnega polinoma;
- sestavi nastavek oblike (*) za rešitev enačbe in reši ustrezni sistem linearnih enačb za koeficiente polinomov $P_k(n)$, ki ga dobiš iz izrazov za znane člene zaporedja $a_i, i = 0, 1, \ldots, r-1$.

... Linearne rekurzivne enačbe – zgled 1

$$a_{n+3} - a_{n+2} - 8a_{n+1} + 12a_n = 0, a_0 = 1, \quad a_1 = 11, \quad a_2 = 15$$

Poiščimo ničle karakterističnega polinoma

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)^2(x+3) = 0$$

Ker je ničla $x_1 = 2$ dvojna, ima rešitev obliko $a_n = (An+B)2^n + C(-3)^n$. Določimo koeficiente A, B in C iz enačb:

$$\begin{aligned} a_0 = 1 &= B + C \\ a_1 = 11 &= (A+B)2 - 3C \\ a_2 = 15 &= (2A+B)4 + 9C \end{aligned}$$

Krajši račun nam da: $A = 2, B = 2, C = -1$ Torej je iskana rešitev:

$$a_n = (n+1)2^{n+1} - (-3)^n$$

...Linearne rekurzivne enačbe – zgled 2

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + 4a_n = 0, \qquad a_0 = 2, \quad a_1 = 5$$

Ničli karakterističnega polinoma $x^2 - 2x + 4 = 0$ sta konjugirani kompleksni števili $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$ in $x_2 = 1 - i\sqrt{3}$. Rešitev ima potemtakem obliko $a_n = Ax_1^n + Bx_2^n$. Določimo koeficienta A in B iz enačb

$$\begin{aligned} a_0 = 2 &= A + B \\ a_1 = 5 &= Ax_1 + Bx_2 \end{aligned}$$

Dobimo

$$A = \frac{5 - 2x_2}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}(2 - i\sqrt{3}) \qquad B = \frac{2x_1 - 5}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}(2 + i\sqrt{3})$$

Ker so: člena a_0, a_1 in koeficienti enačbe cela števila, so tudi vsi členi zaporedja (a_n) cela števila. Zato je upravičena domneva, da se tudi v izrazu za splošni člen a_n lahko znebimo kompleksnih števil.

…Linearne rekurzivne enačbe – zgled 2

Spomnimo se, da lahko vsako kompleksno število z zapišemo v polarni obliki

$$z = r\,e^{i\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

V našem primeru sta $x_1 = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$ in $x_2 = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$. Torej je

$$a_n = 2^{n-1}((2 - i\sqrt{3})e^{\frac{i\pi n}{3}} + (2 + i\sqrt{3})e^{-\frac{i\pi n}{3}}) =$$

$$= 2^{n-1}(2(e^{\frac{i\pi n}{3}} + e^{-\frac{i\pi n}{3}}) - i\sqrt{3}(e^{\frac{i\pi n}{3}} - e^{-\frac{i\pi n}{3}}))$$

Upoštevajmo še, da je $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$ in $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$ pa dobimo končno

$$a_n = 2^n(2\cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3})$$

Včasih pride prav še nekoliko bolj zbita oblika

$$a_n = 2^n\sqrt{7}\cos(\frac{n\pi}{3} - \delta)$$

kjer je $\delta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Catalanova števila

V tem razdelku bomo poiskali odgovor na vprašanje:

> Dano je zaporedje n števil
>
> $$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$
>
> Na koliko načinov lahko izračunamo produkt teh števil, če lahko zmnožimo le sosednja člena in ju nadomestimo s produktom (ter ne smemo spreminjati njihovega vrstnega reda)?

Zastavljeno vprašanje je enakovredno naslednjemu vprašanju na koliko načinov lahko med člene zaporedja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ postavimo $n-1$ parov oklepajev (predklepaj in zaklepaj), tako da natančno določajo izračun vrednosti tako dobljenega izraza? Na primer, za $n = 3$ obstajata dve možnosti

$$((x_1 x_2) x_3) \qquad\qquad (x_1 (x_2 x_3))$$

...Catalanova števila

za $n = 4$ pa pet možnosti

$$(((x_1x_2)x_3)x_4) \qquad ((x_1(x_2x_3))x_4) \qquad ((x_1x_2)(x_3x_4))$$
$$(x_1((x_2x_3)x_4)) \qquad (x_1(x_2(x_3x_4)))$$

Tovrstnim izrazom bomo rekli *oklepajni izrazi.*

Označimo z a_n število oklepajnih izrazov nad zaporedjem n števil. Kakor vemo je:

$$a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 5$$

Ostale pa lahko izračunamo po rekurzivni enačbi, do katere nas pripelje naslednji razmislek. Vzemimo poljuben oklepajni izraz. Če usmerimo pozornost na zunanje oklepaje, opazimo, da nastopijo naslednje možnosti:

$(x_1(\ldots x_2 \ldots x_n \ldots))$
$((\ldots x_1 \ldots x_{n-1} \ldots)x_n)$
$((\ldots x_1 \ldots x_r \ldots)(\ldots x_{r+1} \ldots x_n \ldots)), \quad r = 2, 3, \ldots, n-2$

. . . Catalanova števila

Koliko je različnih oklepajnih izrazov posamezne vrste?

V prvih dveh primerih jih je kar po a_{n-1};
v tretjem primeru pa po pravilu produkta $a_r \cdot a_{n-r}$. Ker je vsak oklepajni izraz natanko enega izmed naštetih tipov, velja po pravilu vsote, za $n \geq 2$:

$$a_n = a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + a_3 a_{n-3} + \cdots +$$

$$+ a_r a_{n-r} + \cdots + a_{n-2} a_2 + a_{n-1}$$

Dobljena enačba precej spominja na produkt zaporedij in jo, če postavimo $a_0 = 0$ in $a_1 = 1$, tudi lahko prevedemo v zahtevano obliko

$$a_n = \sum_{r=0}^{n} a_r a_{n-r}, \quad n \geq 2$$

ki pa ne velja za $n = 1$, ko je $\sum_{r=0}^{1} a_r a_{n-r} = 0$.

. . . Catalanova števila

Določimo še rodovno funkcijo zaporedja (a_n).

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = x + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} a_r . a_{k-r} x^k = \\ &= x + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} a_r . a_{k-r} x^k = x + A(x)^2 \end{aligned}$$

Kakor vidimo rodovna funkcija $A(x)$ zadošča kvadratni enačbi:

$$A(x)^2 - A(x) + x = 0$$

iz katere dobimo $A(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}$.

... Catalanova števila

Ker je $A(0) = a_0 = 0$, je v našem primeru

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-4x)^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^k \end{aligned}$$

kar pomeni

$$a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}, \quad n \geq 1$$

Ker indeks $n = 0$ dela težave, običajno v literaturi srečamo zaporedje

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad n \geq 0$$

Številom C_n pravimo Catalanova števila po Catalanu, čeprav jih je že stoletje prej našel Euler pri preštevanju triangulacij.

Končne diference

Za funkcijo $f(x)$ in $h > 0$ lahko definiramo naslednje operatorje

$Ef(x) = f(x+h)$	pomik
$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$	razlika
$\mathbf{k}f(x) = k \cdot f(x), \quad k \in \mathbb{R}$	razteg
$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$	razlika

in, če je $f(x)$ odvedljiva, še

$Df(x) = \frac{d}{dx} f(x)$	odvod

Naj bo $\mathcal{O} = \{E, \Delta, \nabla, k, D, 1\}^*$. Definirajmo za $A, B \in \mathcal{O}$:

$$
\begin{aligned}
A \circ Bf &= A(B(f)) \\
(\alpha A + \beta B)f &= \alpha Af + \beta Bf
\end{aligned}
$$

$A \circ B, \alpha A + \beta B \in \mathcal{O}$.

…Končne diference

Potem je

$(\mathcal{O}, +)$	asociativna, komutativna, obstaja inverzni
$(\mathcal{O}, \circ)$	asociativna, komutativna; nekateri inverzni
$(\mathcal{O}, +, \circ)$	velja distributivnostni zakon ($\circ$ čez $+$).

Za operatorja D in Δ (mi) ne vemo, ali imata inverzni operator. Veljajo naslednje zanimive zveze:

$$\begin{aligned} E &= 1 + \Delta \\ \nabla &= 1 - E^{-1} \\ E &= e^{hD} \end{aligned}$$

Naj bo $P(x)$ polinom stopnje $n \geq 1$, potem je $\Delta P(x) = Q(x)$, kjer je $Q(x)$ polinom stopnje $n - 1$. Od tu izhaja še, da je

$$\Delta^{n+1} P(x) = 0$$

…Končne diference – zgled

n premic v splošni legi v ravnini da a_n presečišč:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 3, \quad a_4 = 6, \quad a_5 = 10$$

Ker je $\Delta^3 a_n = 0$, poskusimo z nastavkom (*metoda nedoločenih koeficientov*) $a_n = An^2 + Bn + C$. Dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} A+B\ \ +C &= 0 = a_1 \\ 4A+2B+C &= 1 = a_2 \\ 9A+3B+C &= 3 = a_3 \end{aligned}$$

z rešitvijo $A = -B = \frac{1}{2}$, $C = 0$, kar da $a_n = \binom{n}{2}$. Do te rešitve pridemo tudi iz rekurzivne enačbe $a_n = a_{n-1} + (n-1), \quad a_1 = 0$ ali pa naravnost iz bijekcije med točkami in (neurejenimi) pari premic – vsaka točka je presečišče dveh premic.

. . . Končne diference – nehomogene enačbe

V nadaljnem se bomo v glavnem omejili na primer, ko je $h = 1$. Vpeljani operatorji nam, med drugim, pridejo prav pri reševanju nehomogenih rekurzivnih enačb. Pri linearnih enačbah lahko pokažemo, da je

rešitev nehomogene $=$
rešitev homogene $+$ **posebna rešitev**

Kako rešimo homogeno enačbo s konstantnimi koeficienti, smo že spoznali. Pokažimo še, kako pridemo do posebnih rešitev. Oglejmo si to na zgledu.

Končne diference – nehomogene enačbe – zgled

Določimo posebno rešitev enačbe

$$a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = n^2 + n + 1$$

Z operatorji jo lahko zapišemo tudi takole

$$(E^2 + E + 1)a_n = n^2 + n + 1$$

od koder dobimo

$$a_n = \frac{1}{E^2 + E + 1}(n^2 + n + 1)$$

Izrazimo imenovalec z operatorjem Δ

$$\begin{aligned} E^2 + E + 1 &= (\Delta + 1)^2 + (\Delta + 1) + 1 = \\ &= \Delta^2 + 3\Delta + 3 = 3(1 + (\Delta + \frac{\Delta^2}{3})) \end{aligned}$$

. . . Končne diference – nehomogene enačbe – zgled

Torej je tudi

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{3}(1 + (\Delta + \frac{\Delta^2}{3}))^{-1}(n^2 + n + 1) = \\
&= \frac{1}{3}(1 - (\Delta + \frac{\Delta^2}{3}) + (\Delta + \frac{\Delta^2}{3})^2 - \\
&\quad -(\Delta + \frac{\Delta^2}{3})^3 + \ldots)(n^2 + n + 1) = \\
&= \frac{1}{3}(1 - \Delta + \frac{2}{3}\Delta^2 + \Delta^3(\ldots))(n^2 + n + 1)
\end{aligned}
$$

in ker je $\Delta n^2 = 2n + 1$, $\Delta^2 n^2 = 2$, $\Delta n = 1, \ldots$, velja

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}(n^2 + n + 1 - 2n - 1 - 1 + \frac{2}{3} \cdot 2) = \\
&= \frac{1}{3}(n^2 - n + \frac{1}{3})
\end{aligned}
$$