Diskretna matematika 1 / Teorija grafov

1. Osnovni pojmi

Vladimir Batagelj

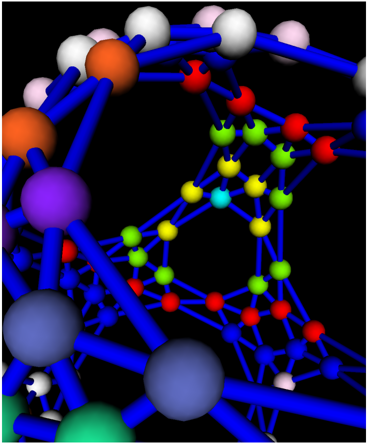
Univerza v Ljubljani

FMF, matematika – Finančna matematika

Ljubljana, december 2013 / februar 2008

Kazalo

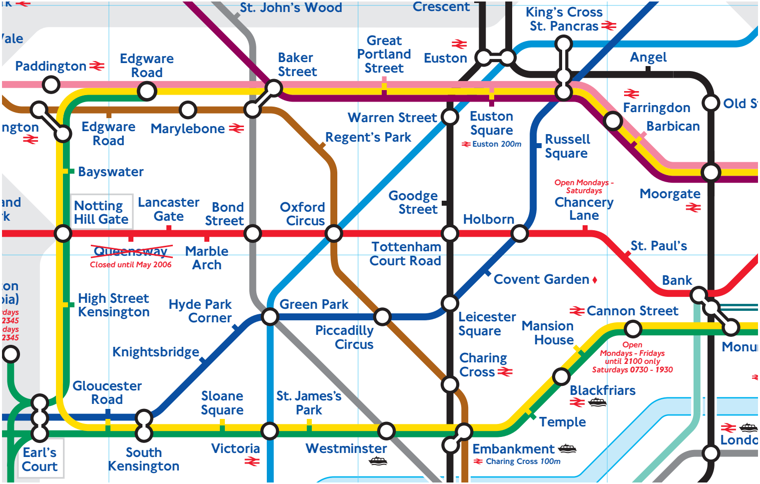
1 Primeri
2 Osnove
3 Podgrafi
4 Homomorfizem
5 Stopnje
6 Posebni grafi



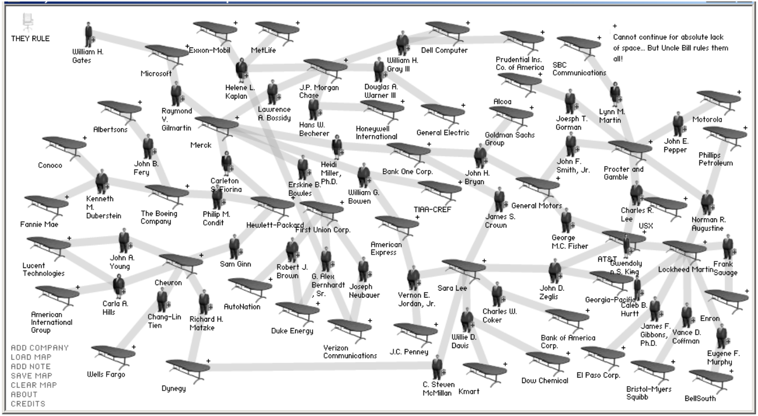
Pajek

Učilnica: http://ucilnica.fmf.uni-lj.si/course/view.php?id=39
Različica: 24. december 2013

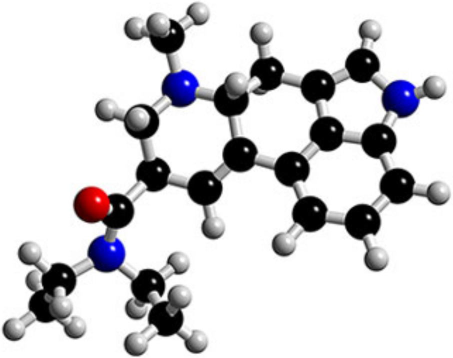
Primer 1: The Tube

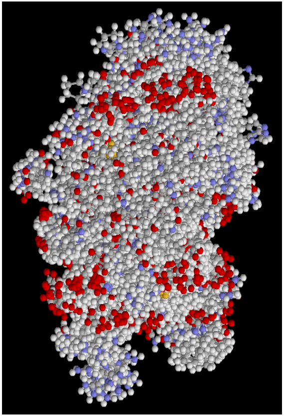


Primer 2: They Rule

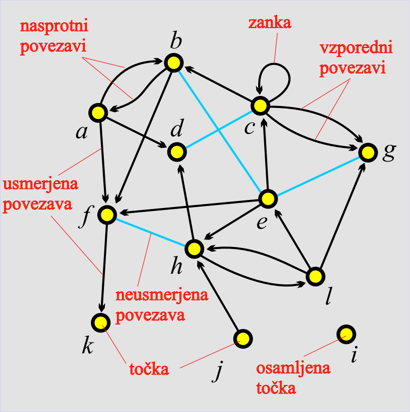


Primer 3: Molekule





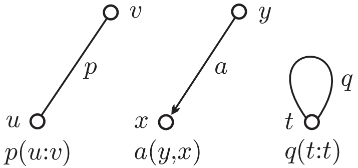
Graf, vozlišče, povezave



Graf imenujemo trojico $G = (V, E, A)$, kjer so V, E in A paroma ločene (končne ali števno neskončne) množice. Množica V je množica vozlišč (ali točk) grafa G; množici E in A pa zaporedoma množica neusmerjenih povezav in množica usmerjenih povezav grafa G. Množici E in A sta lahko tudi prazni.

Graf lahko narišemo tako, da za vsako vozlišče narišemo krogec, povezave pa prikažemo s črtami, ki vežejo ustrezna vozlišča. Če je povezava usmerjena, nakažemo smer s puščico. Pogosto tudi tako dobljeni sliki grafa pravimo kar graf.

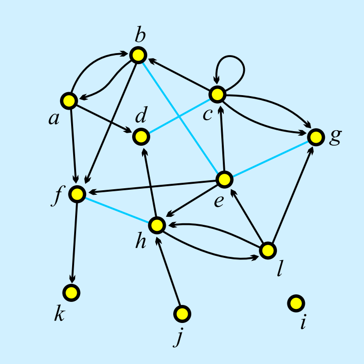
Usmerjene in neusmerjene povezave, zanke



Vsaki povezavi iz $L = E \cup A$ pripadata dve vozlišči - njeni krajišči. Če je povezava usmerjena, je eno krajišče začetek, drugo pa konec povezave.

Da ima neusmerjena povezava p krajišči u in v bomo zapisali $p(u : v)$, oziroma enakovredno $p(v : u)$; in $a(y, x)$, da je vozlišče y začetek in vozlišče x konec usmerjene povezave a. Rekli bomo tudi, da povezava $p \in E$ veže svoji krajišči, in da povezava $a \in A$ gre (vodi) od svojega začetka do svojega konca. V primeru, ko predstavlja obe krajišči povezave isto vozlišče, pravimo taki povezavi zanka. Vozlišče, ki ni krajišče nobene povezave, je osamljeno (izolirano) vozlišče.

Opis grafa – množice



$$
\begin{aligned}
V &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\} \\
A &= \{(a, b), (a, d), (a, f), (b, a), \\
&\quad (b, f), (c, b), (c, c), (c, g)_1, \\
&\quad (c, g)_2, (e, c), (e, f), (e, h), \\
&\quad (f, k), (h, d), (h, l), (j, h), \\
&\quad (l, e), (l, g), (l, h)\} \\
E &= \{(b : e), (c : d), (e : g), (f : h)\} \\
G &= (V, E, A) \\
L &= A \cup E
\end{aligned}
$$

Krajišče, začetek, konec, dvojček

Označimo z $V^{(2)} = \{\{u, v\} : u, v \in V\}$ množico vseh eno ali dvo elementnih podmnožic množice vozlišč V. Pri opisu zvez med vozlišči in povezavami bomo uporabljali naslednje funkcije:

$\mathrm{ext} : L \to V^{(2)}$	– krajišči povezave
$\mathrm{init} : A \to V$	– začetek povezave
$\mathrm{term} : A \to V$	– konec povezave
$\mathrm{twin} : V \times L \to V$	– drugo krajišče povezave

ki zadoščajo naslednjim zahtevam:

$$\mathrm{ext}(p(u : v)) = \{u, v\} \qquad \mathrm{ext}(a(u, v)) = \{u, v\}$$
$$\mathrm{init}(a(u, v)) = u \qquad \mathrm{term}(a(u, v)) = v$$
$$\mathrm{twin}(u, a(u, v)) = v \qquad \mathrm{twin}(u, a(v, u)) = v$$
$$\mathrm{twin}(u, p(u : v)) = v$$

Razširitev zapisa na vse povezave

V nadaljnem nam bosta prišli prav naslednji razširitvi zapisa povezav: naj bo $p \in L$, potem pomeni

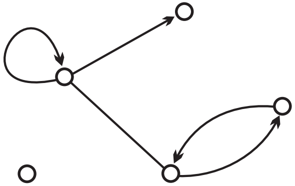
$$p(u, v) \equiv (p \in E \wedge p(u : v)) \vee (p \in A \wedge p(u, v))$$

in

$$p(u : v) \equiv p(u, v) \vee p(v, u)$$

Povezavi sta vzporedni, če imata isti krajišči.
Če je $A = \emptyset$, pravimo, da je graf neusmerjen; in je usmerjen, če je $E = \emptyset$.

Enostavni grafi



Kadar veže vsak par vozlišč v danem grafu kvečjemu ena neusmerjena povezava ali pa vodi v vsako smer največ po ena usmerjena povezava in graf nima neusmerjenih zank, pravimo da je graf enostaven. Enostavnim usmerjenim grafom pravimo tudi relacijski ali Bergeovi grafi.

Pri enostavnih grafih je vsaka povezava enolično določena s krajiščema in vrsto (usmerjena/neusmerjena). Zato lahko neusmerjeno povezavo s krajiščema u in v označimo kar z $(u: v)$; usmerjeno povezavo z začetkom u in koncem v pa z (u, v). Potemtakem je množica povezav A relacijskega grafa $G = (V, \emptyset, A)$ povratno enolično povezana z relacijo:

$$R_A = \{(u, v) : \exists a \in A : a(u, v)\} \subseteq V \times V$$

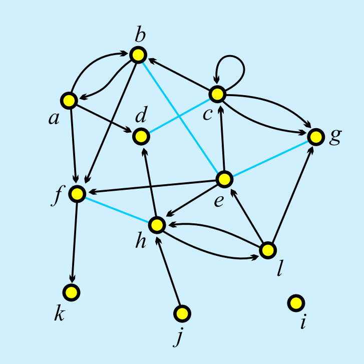
Tako smo prišli do običajne definicije relacijskega grafa kot dvojice (V, R), pri čemer je $R \subseteq V \times V$ dvomestna relacija nad V.

Končni grafi

Če so vse tri množice V, E in A končne, je tudi graf končen. V tem sestavku se bomo v glavnem ukvarjali le s končnimi grafi, zato bomo ta pridevnik opuščali. Število vozlišč grafa bomo označevali z n, število povezav pa z m. Torej

$$n = \mathrm{card}(V) \qquad \text{in} \qquad m = \mathrm{card}(L)$$

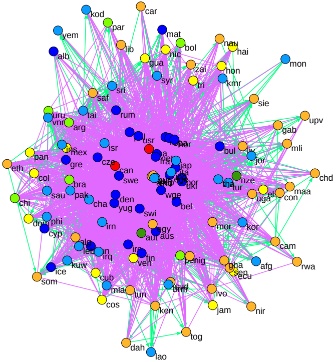
Graf – Matrika

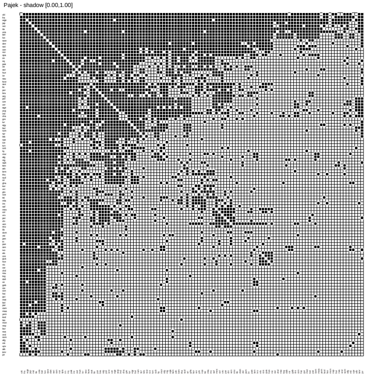


	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*
a	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
b	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	1	0	0	2	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
g	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
h	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
j	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
k	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
l	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0

Graf G je enostaven ntk. vse vrednosti v matriki so 0 ali 1.

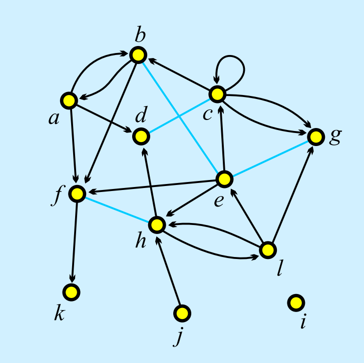
Slika grafa / Matrični prikaz

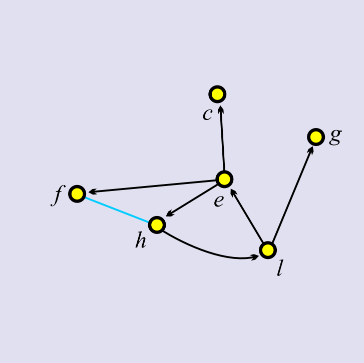




Na sliki je prikazan graf trgovine med izbranimi državami sveta. Pri večjih grafih z veliko povezavami postane slika grafa nepregledna; v matričnem prikazu, za ustrezni vrstni red vozlišč, pa lahko opazimo pravilnosti in vzorce.

Podgrafi





Graf $H = (V', E', A')$, za katerega velja $V' \subseteq V$ in $L' \subseteq L$, imenujemo podgraf grafa $G = (V, E, A)$ in zapišemo $H \subseteq G$. Pozor, ker je H graf, so vsa krajišča povezav iz L' v V'.

. . . Podgrafi

Če je $V' = V$, govorimo o vpetem podgrafu. Poleg vpetih podgrafov poznamo še podgrafe, porojene z množico vozlišč $V' \subseteq V$:

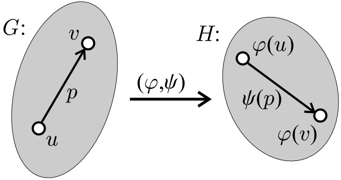
$$L' = L(V') = \{p \in L : \exists u, v \in V' : p(u \colon v)\}, \qquad \mathrm{ext}(p) \subseteq V'$$

oziroma z množico povezav $L' \subseteq L$:

$$V' = V(L') = \{v \in V : \exists p \in L' \exists u \in V : p(u \colon v)\}$$

$$= \cup_{p \in L'} \mathrm{ext}(p) = \mathrm{ext}(L')$$

Homomorfizmi in izomorfizmi



Imejmo grafa $G = (V, E, A)$ in $H = (V', E', A')$. Preslikavi $\varphi : V \to V'$ in $\psi : L \to L'$ določata šibki homomorfizem grafa G v graf H natanko takrat, ko velja:

$$\forall u, v \in V \, \forall p \in L : (p(u : v) \Rightarrow \psi(p)(\varphi(u) : \varphi(v)))$$

oziroma določa (krepki) homomorfizem grafa G v graf H natanko takrat, ko velja:

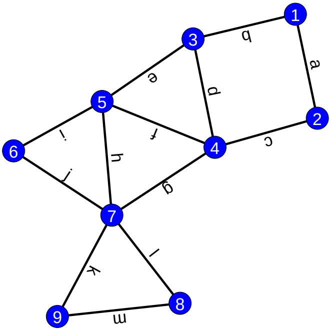
$$\forall u, v \in V \, \forall p \in L : (p(u, v) \Rightarrow \psi(p)(\varphi(u), \varphi(v)))$$

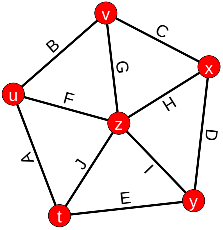
Pri enostavnih grafih je krepki homomorfizem določen že s preslikavo φ.

Izomorfizmi in stalnice

V primeru, ko sta φ in ψ bijekciji in v ustreznem pogoju velja namesto implikacije ekvivalenca, pa govorimo o izomorfizmu grafov G in H . Da sta grafa šibko izomorfna zapišemo $G \sim H$; da sta (krepko) izomorfna pa $G \approx H$. Obe izomorfnosti sta ekvivalenčni relaciji in velja $\approx \subset \sim$.
Stalnica ali invarianta grafa imenujemo vsako grafu prirejeno število, ki je enako za vse med seboj izomorfne grafe. Stalnice imajo pomembno vlogo pri postopkih za ugotavljanje izomorfnosti grafov. V nadaljevanju bomo spoznali več stalnic.

Homomorfizem



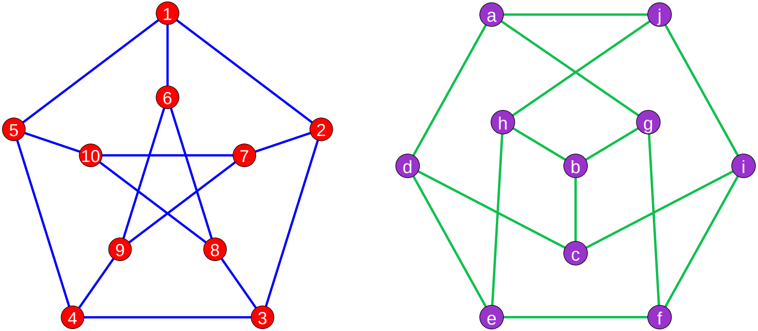


φ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	t	y	z	x	v	u	z	y	t

ψ	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
	E	J	D	H	G	C	H	G	B	F	J	I	E

Pajek: homoEna.net

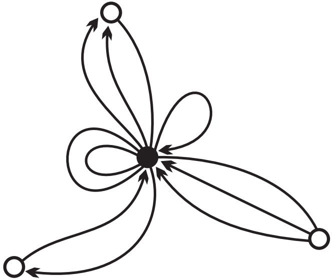
Izomorfna grafa



φ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	b	h	j	a	g	c	e	i	d	f

Pajek: izoPet.net

Zvezde, kratnosti in stopnje



Števila vseh povezav izbrane vrste (usmerjene/neusmerjene, vstopajoče/ izstopajoče, vse, ...) s krajiščem v danem vozlišču, oziroma števila povezav, ki vežejo dani vozlišči, imenujemo kratnosti povezav.

Formalno vpeljemo kratnosti s pomočjo zvezd. Zvezda v danem vozlišču je množica vseh povezav, ki imajo to vozlišče za krajišče:

$$L(v) = \{p : v \in \mathrm{ext}(p)\}$$

Zvezde, kratnosti in stopnje

Pravzaprav poznamo več vrst zvezd. Npr.:

$$\begin{aligned} L_0(v) &= \{p : \mathrm{ext}(p) = \{v\}\} \\ E(v) &= \{p : p \in E \wedge v \in \mathrm{ext}(p)\} \\ A_{\mathrm{term}}(v) &= \{p : p \in A \wedge \mathrm{term}(p) = v\} \end{aligned}$$

Tako lahko definiramo kratnost povezav v vozlišču u ali stopnjo vozlišča u

$$d(u) = \mathrm{card}(L(u))$$

kratnost povezav med vozliščema u in v

$$d(u, v) = \mathrm{card}(L(u) \cap L(v))$$

in kratnost usmerjenih povezav iz vozlišča u v vozlišče v

$$_A d_{out}(u, v) = \mathrm{card}(A_{\mathrm{init}}(u) \cap A_{\mathrm{term}}(v))$$

Zveze

Med kratnostmi velja cel kup zvez. Na primer:

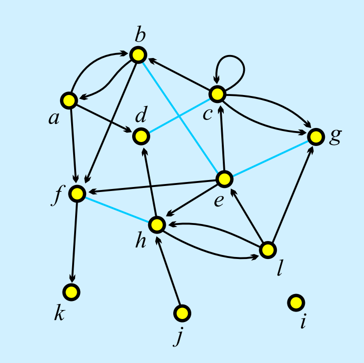
$$d(u,v) = d(v,u)$$

in

$$d(u) = \sum_{v \in V} d(u,v)$$

Kadar želimo posebej povedati, da se neko število nanaša na graf G, mu dodamo oznako grafa. Tako na primer z oznako $d(u,v;G)$ poudarimo, da gre za kratnost povezav med vozliščema u in v glede na graf G.
Če je za vsako vozlišče $v \in V$ stopnja $d(v)$ končna, pravimo, da je graf lokalno končen.

Graf – Sosedi



$N_A(a) = \{b, d, f\}$
$N_A(b) = \{a, f\}$
$N_A(c) = \{b, c, g, g\}$
$N_A(e) = \{c, f, h\}$
$N_A(f) = \{k\}$
$N_A(h) = \{d, l\}$
$N_A(j) = \{h\}$
$N_A(l) = \{e, g, h\}$

$N_E(e) = \{b, g\}$
$N_E(c) = \{d\}$
$N_E(f) = \{h\}$

$$N(v) = N_A(v) \cup N_E(v)$$

Valence

Na povezave s krajiščem v danem vozlišču lahko gledamo na dve načina (povezave v celoti; ali pa čisto lokalno, kot polpovezave – zanke štejemo dvakrat). Zato vpeljemo še pojem valence:

$$v(u) = d(u) + d_0(u)$$

kjer je $d_0(u) = \mathrm{card}(L_0(u))$ število zank v vozlišču u.
Poglejmo si vsoto vseh valenc. Vzemimo povezavo p s krajiščema u in t. Če je $u \neq t$, štejemo povezavo enkrat v valenci vozlišča u in drugič v valenci vozlišča t; če pa je $u = t$, je p zanka in jo, po definiciji valence, štejemo dvakrat v vozlišču u. V vsakem primeru jo v vsoti vseh valenc štejemo natanko dvakrat. Torej je:

$$\sum_{u \in V} v(u) = 2m \qquad \text{oziroma} \qquad \left(\sum_{u \in V} v(u)\right) \bmod 2 = 0$$

Lema o rokovanjih

Od tu izhaja naslednja ugotovitev:
V vsakem grafu je sodo vozlišč lihe valence.

Dokaz: Naj bo V_0 množica vozlišč sode valence in V_1 množica vozlišč lihe valence. Velja $V_0 \cup V_1 = V$ in $V_0 \cap V_1 = \emptyset$. Zato je

$$
\begin{aligned}
0 &= \Big(\sum_{u \in V} v(u)\Big) \bmod 2 = \Big(\sum_{u \in V_0} v(u) + \sum_{u \in V_1} v(u)\Big) \bmod 2 \\
&= \Big(\Big(\sum_{u \in V_0} v(u)\Big) \bmod 2 + \Big(\sum_{u \in V_1} v(u)\Big) \bmod 2\Big) \bmod 2 \\
&= \mathrm{card}(V_1) \bmod 2
\end{aligned}
$$

□

Gornji izrek pogosto imenujejo tudi lema o rokovanjih, kar izhaja iz naslednje "preobleke": Na nekem srečanju se je več ljudi med seboj rokovalo. Vselej se je sodo izmed njih rokovalo z lihim številom udeležencev srečanja.

Sosedi

Vozlišči sta sosednji, če sta krajišči skupne povezave. Podobno kot obstaja več vrst zvezd, obstajajo tudi ustrezne množice sosedov dane vozlišče. Tako je na primer:

$\text{ext}(L(v))\setminus\{v\}$	– (pravi) sosedi vozlišča v
$\text{ext}(E(v) \cup A_{\text{term}}(v))$	– (neposredni) predhodniki vozlišča v
$\text{ext}(E(v) \cup A_{\text{init}}(v))$	– (neposredni) nasledniki vozlišča v

$\ldots$

V končnem grafu je sodo vozlišč, ki ima liho pravih sosedov. To lahko spremidimo takole. Grafu $G = (V, E, A)$ priredimo ogrodje (skelet), to je enostaven neusmerjen graf $S(G) = (V, E', \emptyset)$, pri čemer je:

$$E' = \{(u \colon v) : u, v \in V, u \neq v, \exists p \in L : p(u \colon v)\}$$

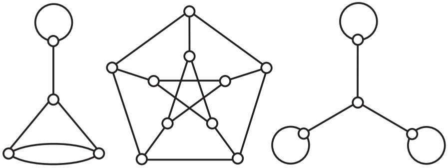
Ker je $v(u; S)$ enaka številu pravih sosedov vozlišča u v grafu G, je, po prejšnji trditvi, trditev dokazana.

$\delta(G)$ in $\Delta(G)$

S stopnjo vozlišča sta povezani dve stalnici grafa: najmanjša valenca $\delta(G)$ in največja valenca $\Delta(G)$

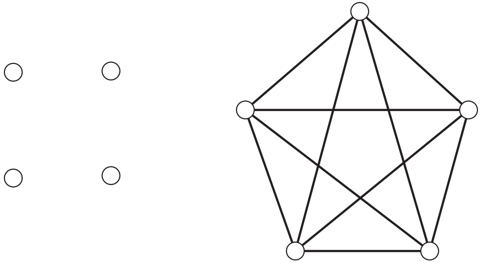
$$\delta(G) = \min_{u \in V} v(u) \quad \text{in} \quad \Delta(G) = \max_{u \in V} v(u)$$

Če imajo vsa vozlišča grafa isto valenco r, pravimo, da je graf r–regularen (pravilen). 3–regularnim grafom pravimo tudi kubični grafi. Na sliki je prikazanih nekaj kubičnih grafov.



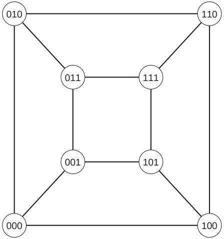
Drugi izmed njih je Petersenov graf, ki ima v teoriji grafov pomembno vlogo kot "dežurni" protiprimer.

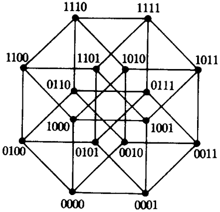
Ničelni graf in polni graf



Poglejmo si še nekaj primerkov enostavnih neusmerjenih grafov:
Ničelni graf na n vozliščih: $N_n = (V, \emptyset)$, $\mathrm{card}(V) = n$
Polni graf na n vozliščih: $K_n = (V, E)$, $\mathrm{card}(V) = n$,
$E = \{(u : v) : u, v \in V \wedge u \neq v\}$
Na sliki sta prikazana grafa N_4 in K_5.

Kocke





Na sliki sta prikazana grafa trirazsežne kocke Q_3 in štirirazsežne kocke Q_4.

k–razsežno kocko Q_k lahko opišemo na primer takole. Za množico vozlišč V vzamemo naravna števila od 0 do $2^k - 1$. Naj bo $u = u_{k-1}u_{k-2}\ldots u_2 u_1 u_0$ (2) dvojiški zapis števila-vozlišča u. Tedaj množico povezav k–razsežne kocke opišemo takole

$$E = \{(u : v) : \sum_{i=0}^{k-1} (u_i \veebar v_i) = 1\}$$

Dvojiški številki krajišč povezave se razlikujeta natanko na enem mestu.

Pravilni poliedri – Platonska telesa