Diskretna matematika 1 / Teorija grafov

2. Sprehodi po grafu

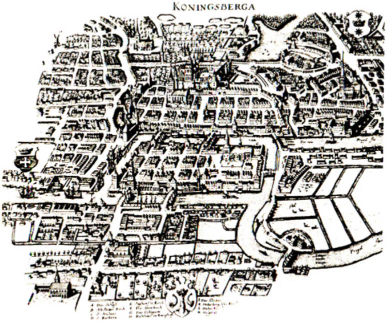
Vladimir Batagelj

Univerza v Ljubljani

FMF, matematika – Finančna matematika

Ljubljana, december 2013 / februar 2008

Kazalo



Učilnica: http://ucilnica.fmf.uni-lj.si/course/view.php?id=39
Različica: 24. december 2013

Sprehodi po grafu

Končno zaporedje vozlišč in povezav grafa $G = (V, E, A)$

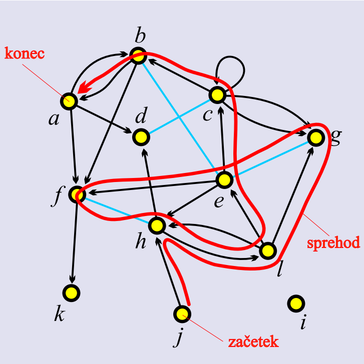
$$S = v_0, s_1, v_1, s_2, v_2, \ldots, s_k, v_k$$

imenujemo sprehod iz v_0 do v_k po grafu G natanko takrat, ko je izpolnjen pogoj

$$\bigwedge_{i=1}^{k} s_i(v_{i-1}, v_i)$$

Število k imenujmo dolžina sprehoda, kar zapišemo $|S| = k$. Vozlišče v_0 je začetek, vozlišče v_k pa konec sprehoda S. Kadar želimo to posebej poudariti zapišemo $S(v_0, v_k)$. V primeru, ko začetek in konec sovpadata, govorimo o sklenjenem sprehodu ali obhodu.

Sprehodi



dolžina $|s|$ sprehoda s je število povezav, ki ga sestavljajo.
$s = (j, h, l, g, e, f, h, l, e, c, b, a)$
$|s| = 11$
Sprehod je sklenjen ali obhod ntk. njegov začetek in konec sovpadata. Če ne upoštevamo smeri povezav v 'sprehodu', dobimo polsprehod ali verigo.
sled – sprehod z različnimi povezavami
pot – sprehod z različnimi vozlišči
cikel – sklenjen sprehod z različnimi notranjimi vozlišči.

Graf je acikličen, ntk. ne vsebuje nobenega cikla.

Vrste sprehodov

Sprehod je enostaven ali sled, če so vse povezave, ki v njem nastopajo, med seboj različne; in je osnoven ali pot, če so vsa vozlišča, razen začetka in konca, skozi katere gre, med seboj različna. Vsak osnoven sprehod je tudi enostaven.
Največja mogoča dolžina osnovnega sprehoda je $|V| - 1$ oziroma $|V|$, če gre za obhod. Največja mogoča dolžina enostavnega sprehoda pa je $|L|$.
Enostaven sprehod po grafu G, ki vsebuje vse povezave grafa G, imenujemo Eulerjev sprehod; osnovnemu sprehodu, ki gre skozi vsa vozlišča grafa G, pa pravimo Hamiltonov sprehod. Nalogo, poiskati Eulerjev/Hamiltonov obhod, imenujemo Eulerjeva/Hamiltonova naloga za grafe.
V primeru, ko zaporedje S zadošča le šibkejšemu pogoju $\bigwedge_{i=1}^{n} s_i(v_{i-1} : v_i)$, mu pravimo veriga ali polsprehod. Vse pojme, ki smo jih srečali pri sprehodih, lahko prenesemo tudi na verige.

Stikanje sprehodov

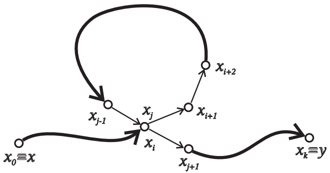
V množici sprehodov $\mathcal{S}^*(G)$ po danem grafu G lahko definiramo operacijo stikanja sprehodov $\circ$ takole: stik sprehodov $S = v_0, s_1, v_1, s_2, \ldots, s_k, v_k$ in $Q = u_0, q_1, u_1, q_2, \ldots, q_l, u_l$ imenujemo, če obstaja (če je $v_k = u_0$), sprehod:

$$S \circ Q = v_0, s_1, v_1, s_2, \ldots, s_k, v_k (= u_0), q_1, u_1, q_2, \ldots, q_l, u_l$$

Včasih nam pride prav tudi ničelni sprehod v vozlišču v : $Z_v = v$. Zanj velja:

$$|Z_v| = 0 \qquad \text{in} \qquad Z_v \circ S(v, u) = S(v, u) \circ Z_u = S(v, u)$$

. . . Stikanje sprehodov



Stikanje ima naslednje lepe lastnosti:

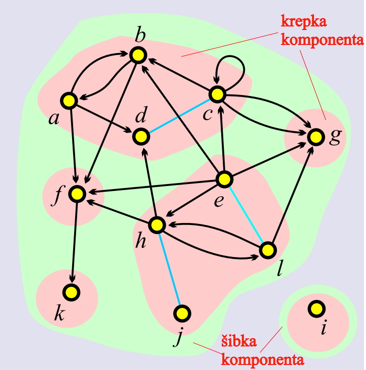
$$S \circ (Q \circ T) = (S \circ Q) \circ T$$

$$|S \circ Q| = |S| + |Q|$$

Če je C obhod in $S \circ C \circ Q$ sprehod, je sprehod tudi $S \circ Q$.

Iz zadnje lastnosti izhaja: če obstaja sprehod iz vozlišča u v vozlišče v, potem obstaja tudi pot iz u v v.

Povezanosti



vozlišče u je dosegljivo iz vozlišča v ntk. obstaja sprehod z začetkom v in koncem u.

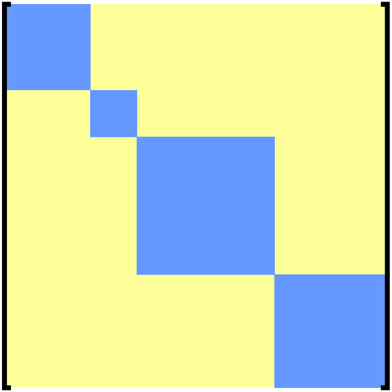
vozlišče v je šibko povezano z vozliščem u ntk. obstaja veriga s krajiščema v in u.

vozlišče v je krepko povezano z vozliščem u ntk. sta vzajemno dosegljivi.

Šibka in krepka povezanost sta enakovrednosti.

Razredi porajajo šibke/krepke komponente ali kose grafa.

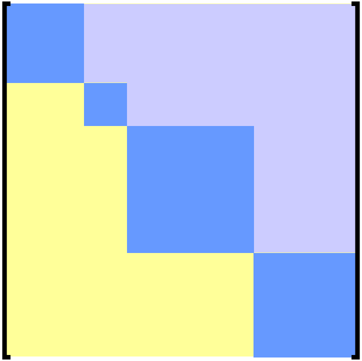
Šibke komponente

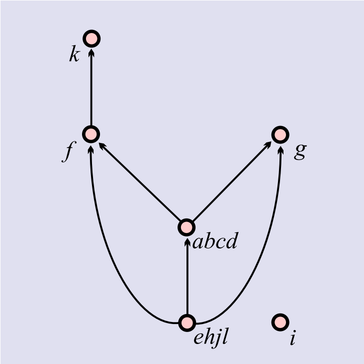


Če preuredimo vozlišča grafa, tako da vozlišča iz iste skupine šibkega razbitja postavimo skupaj, dobimo matrični prikaz sestavljen iz diagonalnih blokov – šibkih komponent.

Za večino problemov velja, da jih lahko ločeno rešimo za vsako šibko komponento posebej in nato dobljene rešitve združimo v rešitev za celotni graf.

Skrčitev grafa

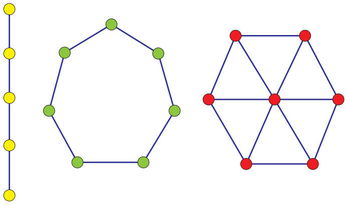




Če v usmerjenem grafu skrčimo vsako krepko komponento v ustrezno vozlišče, odstranimo zanke in združimo vzporedne povezave, je tako dobljeni skrčeni graf acikličen. Za vsak aciklični graf obstaja urejenost / oštevilčenje $i : V \to \mathbb{N}$, tako da velja $(u, v) \in A \Rightarrow i(u) < i(v)$.

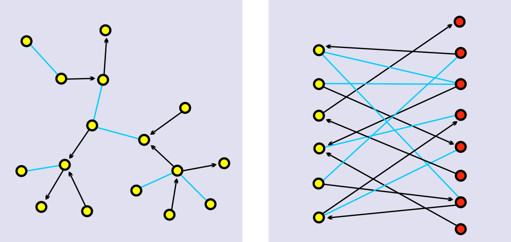
Pot, cikel, kolo

Povezan 2–regularen neusmerjen graf imenujemo cikel. Cikel na n vozliščih označimo s C_n. Če ciklu odvzamemo katerokoli povezavo, dobimo pot. Pot na n vozliščih označimo s P_n. Če ciklu C_n dodamo novo vozlišče in jo povežemo z vsemi ostalimi, dobimo kolo W_{n+1}.



Na sliki so prikazani grafi: pot P_5, cikel C_7 in kolo W_7. Podgraf, ki ga poraja osnovni sprehod je izomorfen poti ali ciklu. Zato uporabljamo pogosto zanj tudi ta dva termina.

Drevesa in dvodelni grafi



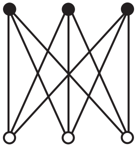
Šibko povezan graf G je drevo ntk. ne vsebuje (zank in) polciklov dolžine vsaj 3. Levi graf na sliki je drevo. Graf, katerega vse komponente so drevesa, je gozd.

Graf $G = (V, L)$ je dvodelen ntk. lahko množico vozlišč V razbijemo na podmnožici V_1 in V_2, tako da ima vsaka povezava iz L eno krajišče v V_1 drugo pa v V_2.

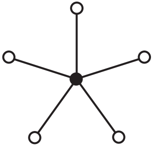
$$\forall p \in E \exists u \in V_1 \exists v \in V_2 : p(u : v)$$

Polni dvodelni grafi

Enostavni dvodelni graf $((X, Y), E)$, $r = \mathrm{card}(X)$, $s = \mathrm{card}(Y)$, v katerem obstajajo vse možne povezave, $E = \{(u\colon v) : u \in X, v \in Y\}$, imenujemo polni dvodelni graf in označimo $K_{r,s}$. Na sliki sta prikazana $K_{3,3}$ in $K_{1,5}$. Grafu $K_{1,n}$ pravimo tudi zvezda.



$K_{3,3}$



$K_{1,5}$

Vozliščna in povezavna povezanost

Vozliščna povezanost κ grafa G je enaka najmanjšemu številu vozlišč, ki jih je potrebno odvzeti iz grafa, tako da je graf porojen s preostalimi vozlišči nepovezan ali trivialen (enak K_1).
Povezavna povezanost λ grafa G je enaka najmanjšemu številu povezav, ki jih je potrebno odvzeti iz grafa, tako da je graf porojen s preostalimi povezavami nepovezan ali trivialen.
Velja Whitneyeva neenakost: $\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$.
Množico k vozlišč grafa G, za katero je graf porojen s preostalimi vozlišči nepovezan ali trivialen, imenujemo k-presek grafa G. Vozlišču, ki je 1-presek grafa, pravimo tudi presečišče. Množico k povezav grafa G, za katero je graf porojen s preostalimi povezavami nepovezan ali trivialen, pa imenujemo k-prerez grafa G. Povezavo, ki je 1-prerez grafa, imenujemo tudi most.

. . . vozliščna in povezavna povezanost

Graf G je (po vozliščih) k-povezan, če je $\kappa(G) \geqslant k$ in je po povezavah k-povezan, če je $\lambda(G) \geqslant k$.
Pomembna sta naslednja izreka (glej Harary):

IZREK

(Dirac) V k-povezanem, $k \geqslant 2$, neusmerjenem grafu G leži vsaka množica k vozlišč na ciklu.

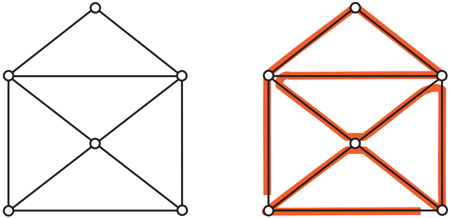
in Whitneyeva različica Mengerjevega izreka:

IZREK

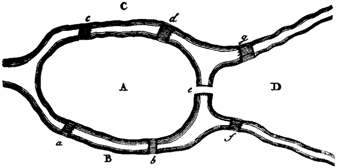
(Whitney) Graf G je po vozliščih/povezavah k-povezan natanko takrat, ko vsak par vozlišč povezuje vsaj k po vozliščih/povezavah ločenih sprehodov.

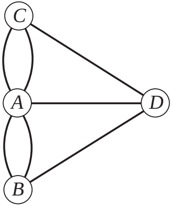
Eulerjev problem

Kot smo že povedali, Eulerjeva naloga za dani graf G sprašuje ali obstaja Eulerjev obhod (sprehod) po njem – to je sprehod, ki gre po vsaki povezavi grafa natanko enkrat. Drugače povedano, ali lahko dani graf narišemo v eni potezi.



. . . Eulerjev problem





IZREK

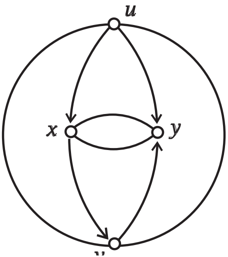
V povezanem neusmerjenem grafu $G = (V, E)$ obstaja Eulerjev obhod natanko takrat, ko so vse vozlišča grafa sode valence; in obstaja Eulerjev sprehod natanko takrat, ko ima največ dve lihi vozlišči – tedaj je eno začetek, drugo pa konec sprehoda.

IZREK

V povezanem usmerjenem grafu $G = (V, A)$ obstaja Eulerjev obhod natanko takrat, ko je za vsako vozlišče $v \in V$ vhodna stopnja enaka izhodni stopnji $d_{\mathrm{term}}(v) = d_{\mathrm{init}}(v)$.

Eulerjeva naloga v splošnih grafih

IZREK



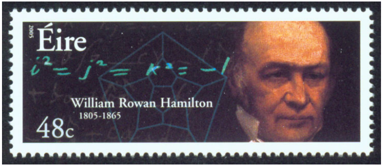
V povezanem grafu G obstaja Eulerjev obhod natanko takrat, ko je za vsako naprazno podmnožico $X \subset V$

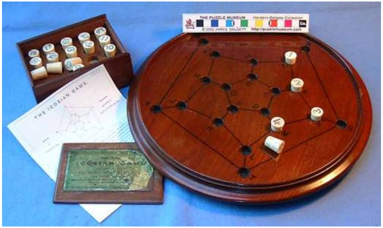
$$P(X) = d_E(X) - |d_{\mathrm{term}}(X) - d_{\mathrm{init}}(X)|$$

nenegativno sodo število. Pri tem je:

$$\begin{aligned}
d_E(X) &= \mathrm{card}\{p \in E : \exists u \in X, v \in V \backslash X : p(u : v)\} \\
d_{\mathrm{term}}(X) &= \mathrm{card}\{p \in A : \exists u \in X, v \in V \backslash X : p(u, v)\} \\
d_{\mathrm{init}}(X) &= \mathrm{card}\{p \in A : \exists u \in X, v \in V \backslash X : p(u, v)\}
\end{aligned}$$

Hamiltonov problem





Čeprav sta si Eulerjev in Hamiltonov problem podobna se Hamiltonov problem izkaže za veliko trši oreh. Je NP-poln – za njegovo reševanje najbrž ne obstaja polinomski algoritem. Lotevamo se ga na dva načina

- zagotavljanje obstoja rešitve: če ima graf dovolj povezav, potem v njem obstaja Hamiltonov cikel.
- dokazovanje, da rešitev ne obstaja: pokažemo, da dani graf nima neke lastnosti, ki jo imajo vsi hamiltonski grafi.

Chvatalov izrek

IZREK (Chvatal)

Naj bo G povezan enostaven neusmerjen graf na $n \geqslant 3$ vozliščih in naj naraščajoče urejeno zaporedje stopenj vozlišč grafa $(d_i)_{i=1}^n$, $i < j \Rightarrow d_i \leqslant d_j$, zadošča pogoju A:

$$\forall k, 1 \leqslant k < \frac{1}{2}n : (d_k \leqslant k \Rightarrow d_{n-k} \geqslant n-k)$$

Potem je graf G Hamiltonov.

Predpostavimo nasprotno: obstaja enostaven povezan graf na n vozliščih, katerega zaporedje stopenj zadošča pogoju A, in ni Hamiltonov. Med vsemi takimi izberemo takega, ki postane Hamiltonov, če mu dodamo katerokoli povezavo – lastnost B. Naj bo to graf $H = (V, E)$.

Da tak graf vselej obstaja sprevidimo takole. Če grafu, v katerem velja lastnost A, dodamo med dvema nesosednjima vozliščema povezavo, ima tudi dobljeni graf lastnost A.

. . . Chvatalov izrek

Ker lahko vsak graf na n vozliščih z dodajanjem (končnega števila) povezav dopolnimo do polnega grafa K_n, ki je Hamiltonov, mora med grafi, ki jih dobimo na ta način iz začetnega grafa, obstajati vsaj en z lastnostjo B.

Vzemimo v grafu H nesosednji vozlišči u in v z največjo skupno stopnjo $d(u) + d(v)$ in naj bo še $d(u) \leqslant d(v)$. Ker graf H ni Hamiltonov (ni poln), tak par vozlišč vedno obstaja. Po lastnosti B pa obstaja v H med vozliščema u in v Hamiltonov sprehod določen z zaporedjem vozlišč:

$$S = t_1 t_2 t_3 \dots t_{n-1} t_n, \qquad t_1 = u, \quad t_n = v$$

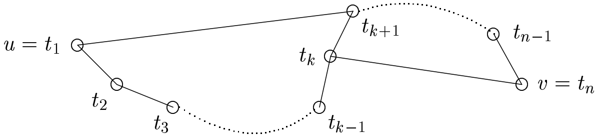
ki mu priredi množici indeksov:

$$I = \{i : (u \colon t_{i+1}) \in E\} \qquad \text{in} \qquad J = \{i : (t_i : v) \in E\}$$

Očitno je $d(u) = \mathrm{card}(I)$ in $d(v) = \mathrm{card}(J)$. Poleg tega velja $I \cap J = \emptyset$.

. . . Chvatalov izrek

Kajti, če bi obstajal $k \in I \cap J$, bi v H obstajal Hamiltonov obhod (glej sliko) $O = t_1 t_2 t_3 \dots t_k t_n t_{n-1} t_{n-2} \dots t_{k+1} t_1$



Ker sta $I, J \subseteq 1..n-1$, je tudi $I \cup J \subseteq 1..n-1$. Torej je

$$d(u) + d(v) = \mathrm{card}(I) + \mathrm{card}(J) = \mathrm{card}(I \cup J) \leqslant n - 1 < n$$

in po predpostavki $d(u) \leqslant d(v)$ dalje $d(u) < \frac{1}{2}n$.
Po drugi strani, za vsak $i \in I$, zaradi $I \cap J = \emptyset$, velja $(t_i, v) \notin E$. Ker je $d(u) + d(v)$ maksimalna, tedaj velja $d(t_i) + d(v) \leqslant d(u) + d(v)$; oziroma $d(t_i) \leqslant d(u)$. Potemtakem obstaja vsaj $\mathrm{card}(I)$ vozlišč stopnje kvečjemu $d(u)$.

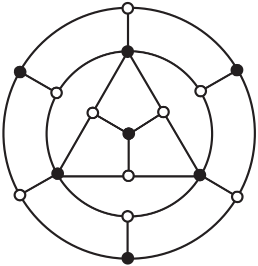
. . . Chvatalov izrek

To pa pomeni, da v naraščajoče urejenem zaporedju stopenj vozlišč grafa H velja $d_{\mathrm{card}(I)} \leqslant \mathrm{card}(I) = d(u)$.
Kakor vidimo je za vozlišče u predpostavka (leva stran v implikaciji) iz pogoja A resnična. Pokažimo sedaj, da v tem primeru ($k = d(u)$) zaključek (desna stran) ni resničen; kar pomeni, da pogoj A ni izpolnjen. To pa je v protislovju z našo začetno predpostavko, da graf G in zato tudi H zadošča pogoju A.
Zopet predpostavimo nasprotno. Recimo, da je zaključek v pogoju A za $k = d(u)$ resničen. Tedaj v naraščajočem zaporedju stopenj velja $d_{n-k} \geqslant n - k$. Torej obstaja vsaj $k + 1$ vozlišč s stopnjo vsaj $n - k$. Ker ima vozlišče u k sosedov, med temi $k + 1$ vozlišči obstaja vsaj eno vozlišče w, ki ni sosed vozlišča u. Zanj velja
$d(u) + d(w) \leqslant d(u) + d(v) < n$ in od tu $d(w) < n - d(u) = n - k$, kar je v protislovju z začetno ugotovitvijo $d(w) \geqslant n - k$.

Drugi izreki

IZREK (Nash-Williams)

Vsak r-regularen graf na $2r+1$ vozliščih je Hamiltonov.



IZREK: če iz povezanega grafa G odstranimo k vozlišč in tako dobimo graf z več kot k komponentami, potem graf G ne vsebuje Hamiltonovega cikla; če je komponent več kot $k+1$, v grafu G ni niti Hamiltonove poti.

Dokaz: Recimo, da v grafu G obstaja Hamiltonov cikel / pot. Tedaj, če odstranimo iz grafa k vozlišč, ta razpade na največ k / $k+1$ podpoti. Vsaka od teh podpoti pripada neki komponenti, na katere razpade graf G; in vsaka komponenta vsebuje vsaj eno podpot. Torej graf G ne more razpasti na več kot k / $k+1$ komponent. □

Drevesa

V tem razdelku se bomo omejili na enostavne neusmerjene grafe.

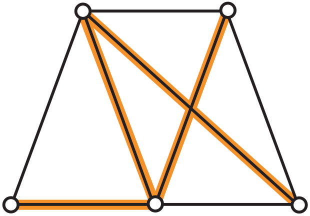
IZREK

Za graf G na n vozliščih so naslednje trditve enakovredne:

1. *graf G je drevo;*
2. *graf G ne vsebuje nobenega cikla in ima $n - 1$ povezav;*
3. *graf G je povezan in ima $n - 1$ povezav;*
4. *graf G je povezan in vsaka povezava je most;*
5. *vsak par vozlišč grafa G je povezan z natanko eno potjo;*
6. *graf G ne vsebuje cikla, toda če dodamo katerokoli novo povezavo dobimo natanko en cikel.*

Dokaz: Izrek dokažemo krožno: $(1) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow \ldots (6) \Rightarrow (1)$. Na primer: $(4) \Rightarrow (5)$. Ker je graf G povezan je vsak par vozlišč povezan z vsaj eno potjo. Recimo, da je z dvema. Potem določata cikel. Če katerokoli povezavo izločimo iz cikla, ostane graf še naprej povezan; torej ni vsaka povezava most – protislovje. □

Vpeto drevo



Vzemimo poljuben povezan graf. Če ni drevo, obstaja v njem vsaj en cikel. Zbrišimo katerokoli povezavo iz tega cikla. Dobljeni graf je še vedno povezan. Postopek ponavljamo, dokler ne dobimo drevesa. To drevo pokriva vsa vozlišča grafa. Zato mu, v skladu z dogovorom, pravimo vpeto drevo.

Pravkar smo pokazali.

IZREK

Graf G je povezan natanko takrat, ko v njem obstaja vpeto drevo.

Vse povezave, ki ne pripadajo danemu vpetemu drevesu T grafa G, imenujemo tetive glede na T. Ker vsak par vozlišč drevesa povezuje natanko ena pot, vsaka tetiva določa natanko en cikel (tetiva + pot).

Baza ciklov

Množici vseh ciklov, ki jih tako dobimo pravimo baza ciklov (za T); posameznemu ciklu pa osnovni cikel. Vsak cikel grafa G je mogoče izraziti kot simetrično vsoto osnovnih ciklov. Vse baze ciklov imajo isto moč – ciklomatsko število grafa $c(G) = m - n + 1$.
Po drugi strani, ker je most, vsaka povezava vpetega drevesa razdeli drevo na dve drevesi – množica vozlišč V razpade na dve množici X in Y. Tedaj je množica povezav
$E(X, Y) = \{p \in E : \exists u \in X, v \in Y : p(u : v)\}$ prerez grafa G.
Pravimo mu osnovni prerez. Vsi osnovni prerezi sestavljajo bazo prerezov. Vsak prerez grafa G je mogoče izraziti kot simetrično vsoto osnovnih prerezov. Vse baze prerezov imajo isto moč $r(G) = n - 1$.
Vse povedano lahko preprosto posplošimo na gozdove.
Baze ciklov in prerezov imajo pomembno vlogo v teoriji vezij, saj nam po Kirchoffovih zakonih omogočajo sestaviti neodvisne sisteme enačb, ki opisujejo dano vezje.