Diskretna matematika 1 / Teorija grafov

3. Ravninski grafi

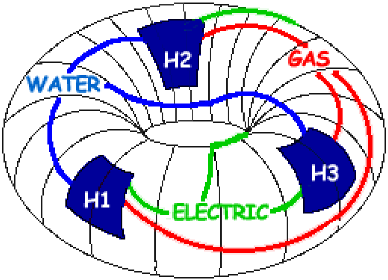
Vladimir Batagelj

Univerza v Ljubljani

FMF, matematika – Finančna matematika

Ljubljana, december 2013 / februar 2008

Kazalo

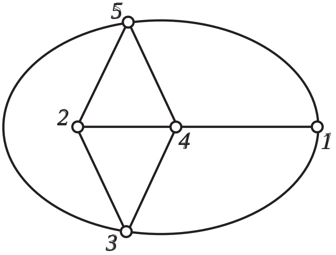


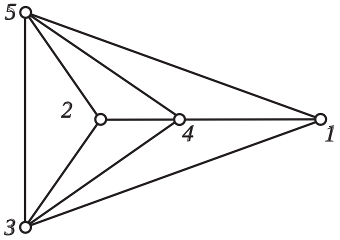
Učilnica: http://ucilnica.fmf.uni-lj.si/course/view.php?id=39
Različica: 24. december 2013

Ravninski grafi

Nekoliko ohlapno povedano je graf ravninski ali planaren natanko takrat, ko ga lahko v ravnini prikažemo (narišemo, vložimo) tako, da se nobeni krivulji, ki predstavljata povezavi, ne sečeta (razen v skupnem krajišču, če ga imata).

Zgled: Kakor vidimo s slike je graf $K_5 - (1 : 2)$ ravninski. □





Ravninski grafi in Jordanove krivulje

Fary je leta 1948 pokazal, da lahko vsak enostaven ravninski graf brez zank narišemo na zahtevani način tako, da so povezave predstavljene z daljicami. Graf iz prejšnjega primera $K_5 - (1\colon 2)$ narišemo na primer tako, kot je prikazano na desni strani slike.

Za natančnejši opis vložitve grafa v ravnino (ali kako drugo ploskev), moramo uporabiti pojem Jordanove krivulje ali loka. To je zvezna krivulja v ravnini, ki ne seče sama sebe. Krivulja je sklenjena, če se njeni krajišči ujemata. Vložitev grafa v ravnino je preslikava, ki vozliščem grafa priredi točke ravnine, povezavam pa Jordanove krivulje med točkami, ki pripadajo njihovim krajiščem, tako da ni presečnih točk. Presečno točko dobimo, če se krivulji sekata v točki, ki ne pripada nobenemu vozlišču grafa, ali pa, če gre krivulja skozi točko, ki pripada vozlišču grafa, ki ni krajišče krivulji pripadajoče povezave.

Jordanove krivulje

Pri dokazovanju lastnosti vložitev nam pride prav naslednja izpeljanka Jordanovega izreka:

IZREK

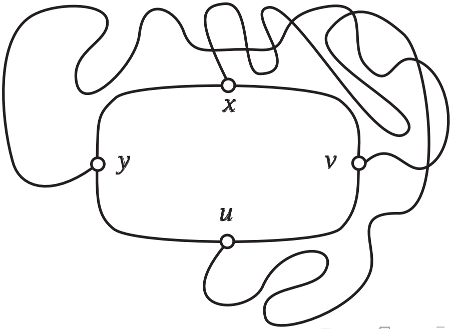
Naj bo C sklenjena Jordanova krivulja v ravnini in x ter y poljubni različni točki na njej. Potem vsaka Jordanova krivulja, ki ju veže, poteka (razen obeh točk) v celoti po zunanjosti ali pa v celoti po notranjosti C, ali pa seka krivuljo C v točki različni od x in y.

Jordanove krivulje

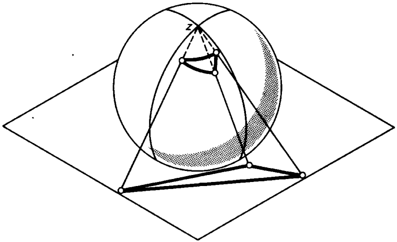
Z upoštevanjem tega izreka ni težko pokazati na primer:

IZREK

Naj bo C sklenjena Jordanova krivulja v ravnini in x, y, u, v zaporedne točke na C. Tedaj ne moremo po zunanjosti (notranjosti) krivulje speljati Jordanovi krivulji, ki bi vezali para točk x, u in y, v, ne da bi se ti dve krivulji sekali.



Stereografska projekcija



S stereografsko projekcijo skozi "severni tečaj" lahko pokažemo, da je graf ravninski natanko takrat, ko ga je mogoče vložiti v sfero (oblo – površino krogle).

Posamezna vložitev grafa v ravnino razbije ravnino na "zaplate", ki jim pravimo območja ali lica. Dve točki ravnine, ki ne ležita na sliki grafa, pripadata istemu območju natanko takrat, ko ju lahko povežemo s sklenjeno krivuljo, ki ne seče slike grafa. Vložitev grafa v splošnem ni enolična. Velja pa izrek:

IZREK (Whitney)

Vsak 3-povezan ravninski graf je mogoče na en sam način vložiti v sfero.

Eulerjeva enakost

Izkaže se še, da je število območij, na katera razpade ravnina, za vse vložitve danega grafa v ravnino isto in da velja zveza:

IZREK (Euler, 1736)

Naj bo G povezan ravninski graf in n, m in f zaporedoma števila vozlišč, povezav in območij. Potem velja:

$$m + 2 = n + f$$

Dokaz: Naj bo G nek povezan ravninski graf z $m + 1$ povezavami. Graf G lahko na vsaj en način dobimo iz nekega povezanega ravninskega grafa G' z m povezavami, tako da mu dodamo novo povezavo e. Pri tem nastopijo naslednje možnosti:

...Eulerjeva enakost

e je zanka :

$n(G) = n(G')$ $m(G) = m(G') + 1$ $f(G) = f(G') + 1$

e povezuje dve različni vozlišči grafa G' :

$n(G) = n(G')$ $m(G) = m(G') + 1$ $f(G) = f(G') + 1$

e povezuje vozlišče grafa G' z novom vozliščem :

$n(G) = n(G') + 1$ $m(G) = m(G') + 1$ $f(G) = f(G')$

Za vse tri možnosti pa velja

$$n(G) + f(G) - m(G) = n(G') + f(G') - m(G')$$

Torej je izraz $n(G) + f(G) - m(G)$ konstanten za vse povezane ravninske grafe. Vrednost konstante določimo na primer iz vrednosti za graf K_1: $m = 0$ in (zaradi povezanosti) $n = f = 1$. Torej je res

$$n(G) + f(G) = m(G) + 2$$

Eulerjeva enakost – posledice

Iz Eulerjeve enakosti izhaja več lastnosti ravninskih grafov:

IZREK

(posplošena Eulerjeva enakost): Naj bo G ravninski graf, ki ga sestavlja k komponent. Potem velja

$$n + f = m + k + 1$$

Dokaz: Uporabimo Eulerjevo enakost za vsako komponento posebej. Neskončno območje štejemo le enkrat. □

IZREK

V povezanem enostavnem ravninskem grafu, ki ima vsaj dve povezavi, velja ocena:

$$\frac{3}{2} f \leqslant m \leqslant 3.n - 6$$

Eulerjeva enakost – posledice

Dokaz: V enostavnem neusmerjenem grafu ni večkratnih povezav in zank, zato je vsako območje omejeno vsaj s tremi povezavami. Naj bo L' množica povezav, ki razmejujejo območja. Tedaj je $3.f \leqslant 2.|L'|$ oziroma

$$\frac{3}{2}f \leqslant |L'| \leqslant |L| = m$$

S tem je prvi del ocene dobljen. Obrnimo dobljeno neenakost $f \leqslant \frac{2}{3}m$ in jo vstavimo v Eulerjev obrazec:

$$2 = n + f - m \leqslant n + \frac{2}{3}m - m = n - \frac{m}{3}$$

od koder sledi še drugi del ocene

$$m \leqslant 3.n - 6$$

$\square$

Eulerjeva enakost – posledice

IZREK

V povezanem enostavnem ravninskem grafu obstaja vsaj eno vozlišče stopnje največ 5.

Dokaz: Predpostavimo nasprotno: vsa vozlišča imajo stopnjo vsaj 6. Potem je

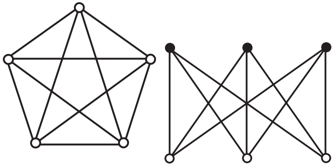
$$2.m = \sum_{v \in V} d(v) \geqslant 6.n$$

oziroma

$$m \geqslant 3.n$$

kar je v protislovju z drugim delom prej dokazane ocene. □

Eulerjeva enakost – K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska



Oceno lahko uporabimo tudi pri dokazu izreka:

IZREK

Grafa K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska.

Dokaz: Recimo, da sta ravninska, tedaj :

K_5 : Upoštevajmo $n = 5$ in $m = 10$ v drugem delu ocene, pa dobimo protislovje $15 - 6 \geqslant 10$.

$K_{3,3}$: Iz $n = 6$ in $m = 9$ dobimo po Eulerjevem obrazcu $f = 5$. Ker je graf $K_{3,3}$ dvodelen, je vsako območje omejeno vsaj s štirimi povezavami. Torej je $2.m \geqslant 4.f$ oziroma $18 \geqslant 20$; in protislovje je tu. □

Skrčitve povezav

Vsak podgraf ravninskega grafa je tudi sam ravninski. Torej vsak graf, ki vsebuje K_5 ali $K_{3,3}$ kot podgraf, ni ravninski. Velja pa še več.

Preden nadaljujemo povejmo, kaj je skrčitev povezave: to je transformacija grafa, pri kateri identificiramo njeni krajišči in izločimo morebitne zanke in večkratne povezave, ki pri tem nastanejo.

Graf G je skrčljiv na graf H, če obstaja končno zaporedje skrčitev, katerega prvi člen je graf G, zadnji pa graf H.

Sedaj pa že lahko navedemo izrek, ki karakterizira ravninske grafe.

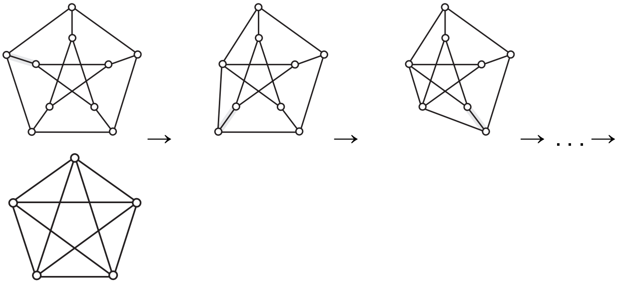
Izrek Kuratowskega

IZREK (Kuratowski)

Graf G je ravninski natanko takrat, ko ne vsebuje podgrafa, ki je skrčljiv na K_5 ali $K_{3,3}$.

Izrek Kuratowskega / zgled

Pokažimo, da Petersenov graf ni ravninski.



Triangulacije

Če v ravninskem grafu obstaja kako lice, katerega rob ni trikotnik (3-cikel), ga lahko razdelimo na dva dela tako, da povežemo z novo povezavo, ki veže dve nesosednji točki na njenem robu. Dobljeni graf ostane ravninski. Ta postopek lahko nadaljujemo vse dokler ne dobimo samih trikotnikov.

Ravninskim grafom, ki imajo za lica same trikotnike, pravimo triangulacije ali maksimalni ravninski grafi.

Pomembna je naslednja lastnost triangulacij:

IZREK (Whitney)

Vsaka triangulacija ravnine na več kot treh vozliščih je 3-povezana.

Triangulacije

Ker v triangulaciji vsaka povezava pripada dvema trikotnikoma in vsakemu trikotniku tri povezave, velja $3.f = 2.m$. Če upoštevamo še

$$2.m = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_k k.n_k$$

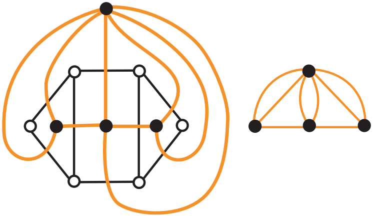
kjer je n_k enak številu vozlišč triangulacije, ki imajo stopnjo k, dobimo iz Eulerjeve enakosti, naslednjo zvezo med n_k v triangulacijah:

$$12 = \sum_k n_k.(6 - k)$$

Ker mora biti vsota na desni pozitivna, mora biti vsaj za en $k, k < 6$ člen n_k različen od nič.

Dualni graf

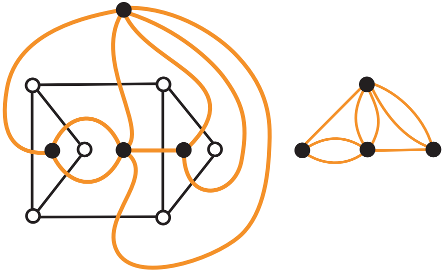
Danemu ravninskemu grafu G lahko priredimo nov graf $G*$, ki mu pravimo dualni graf grafa G, na naslednji način:



- v vsakem licu vložitve grafa G izberemo točko. Te točke predstavljajo vložitve vozlišč grafa $G*$;
- za vsako povezavo $e \in L$ povežemo s krivuljo točki, ki ležita v licih na obeh straneh krivulje, ki pripada povezavi e. Lice je lahko tudi eno samo – dobimo sklenjeno krivuljo (zanko). Te krivulje predstavljajo vložitve povezav grafa $G*$.

Dualni graf

Če enostavni graf G ni 3-povezan, graf G^* ni vedno enostaven in tudi ni do izomorfizma natančno določen (različne vložitve lahko določajo različne grafe), kakor je razvidno iz slike:



Dualni graf

Whitney je pokazal tudi:

IZREK (Whitney)

Dualni graf ravninskega 3-povezanega enostavnega grafa je (do izomorfizma) enolično določen in tudi sam 3-povezan enostavni ravninski graf.

Omenimo še Steinitzov izrek:

IZREK (Steinitz)

Enostavni graf je ravninski in 3-povezan natanko takrat, ko je ogrodje (1-skelet) konveksnega trirazsežnega poliedra.

Razmeroma hitro se lahko prepričamo tudi, da velja:

IZREK

V 3-povezanem ravninskem kubičnem grafu so vsi 3-cikli in 4-cikli robovi lic.