Diskretna matematika 1 / Teorija grafov

4. Barvanja grafov

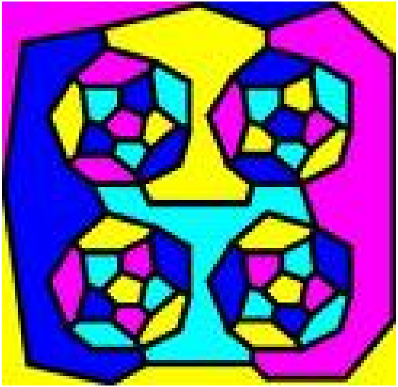
Vladimir Batagelj

Univerza v Ljubljani

FMF, matematika – Finančna matematika

Ljubljana, januar 2014 / maj 2008

Kazalo



Učilnica: http://ucilnica.fmf.uni-lj.si/course/view.php?id=39
Različica: 7. januar 2014

Barvanja grafov

DiMa 8
Barvanja grafov

V. Batagelj

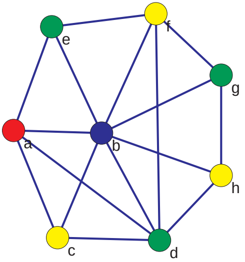
Barvanja vozlišč

Primeri

Lastnosti

Algoritmi

Barvanje povezav



v	a	b	c	d	e	f	g	h
b	1	2	3	4	4	3	4	3

Naj bo $G = (V, E)$ neusmerjen enostaven graf. Preslikavo $b : V \to B$ imenujemo barvanje, B je množica barv. Barvanje b je pravilno, če zadošča pogoju

$$\forall u, v \in V : ((u : v) \in E) \Rightarrow b(u) \neq b(v))$$

sosednja vozlišča so različno pobarvana. Število $\chi(b, G) = |b(V)|$ v barvanju b uporabljenih barv imenujemo barvitost barvanja b.
Najmanjšo barvitost med pravilnimi barvanji grafa G imenujemo barvnost grafa G

$$\chi(G) = \min_{b \text{ je pravilno barvanje}} \chi(b, G)$$

Barvanja grafov – primeri

Naloga o barvanju vozlišč grafa sodi v seznam "osnovnih" kombinatoričnih nalog, saj lahko nanjo prevedemo celo vrsto, navidez neprimerljivih, nalog. Poglejmo si nekaj primerov:

Radijski oddajniki. Radijska oddajnika lahko motita eden drugega, če sta si preblizu. Kako razdeliti valovne dolžine dani množici oddajnikov, tako da se ne bodo medsebojno motili? Koliko najmanj valovnih dolžin je za to potrebnih?
Prevod: vozlišča grafa: oddajniki; povezave: oddajnika sta sosednja, če sta si preblizu (lahko motita eden drugega); barve: valovne dolžine.

Barvanja grafov – primeri

Turistični vodiči. Turistična agencija namerava organizirati n izletov. Za vsak izlet i poznamo datum njegovega začetka Z_i in datum njegovega konca K_i. Koliko (najmanj) vodičev je potrebnih za izvedbo teh izletov? Katere izlete bo vodil posamezni vodič?
Prevod: vozlišča grafa: izleti (oziroma skupine, če je za isti izlet predvidenih več vodičev); povezave: izlet i je povezan z izletom j natanko takrat, ko je: $(Z_i, K_i) \cap (Z_j, K_j) \neq \emptyset$; barve: vodiči.

Optimizacija porabe pomnilnika Naj bo $X = \{X_i\}$ množica spremenljivk (istega tipa, da ne bo težav), ki nastopajo v nekem programu. Nekaj prostora prihranimo, če nekaterim spremenljivkam priredimo isti prostor; seveda tako, da dobimo enakovreden program. Koliko najmanj prostora je potrebnega? Katerim spremenljivkam pripada isti prostor?

Barvanja grafov – primeri

Prevod: vozlišča grafa: spremenljivke; povezave: vozlišči sta povezani, če sta ustrezni spremenljivki lahko istočasno aktivni; barve: prostor v pomnilniku.

Morda ne bo odveč, če malo natančneje opišemo, kako določimo povezanost (sočasno aktivnost) dveh spremenljivk. Sestavimo shemo programa in v njej povsod zamenjamo akcije z ustreznimi:

Use X – vrednost spremenljivke X je bila uporabljena

oziroma

Def X – vrednost spremenljivke X je bila spremenjena

V pravilno sestavljenem programu mora biti na vsaki poti po shemi programa od začetka do nekega Use X vselej vsaj en Def X. Vozlišči X in Y sta povezani natanko takrat, ko lahko v shemi programa najdemo pot z začetkom v Def Y in koncem v Use X, ki ne vsebuje nobene točke z oznako Def X.

Barvnost grafa – lastnosti in ocene

Neposredno iz definicije barvnosti $\chi(G)$ grafa G razberemo naslednje lastnosti:

1. $\chi(G) \leqslant \chi(b, G) \leqslant \mathrm{card}(V)$
2. $H \subseteq G \Rightarrow \chi(b, H) \leqslant \chi(b, G)$

2' $H \subseteq G \Rightarrow \chi(H) \leqslant \chi(G)$

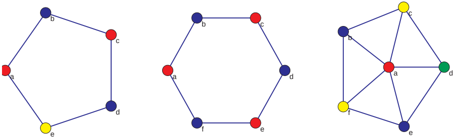
3. naj bodo G_i komponente povezanosti grafa G, potem je

$$\chi(G) = \max_i \chi(G_i)$$

4. $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$

Barvnost grafa – lastnosti

Iz lastnosti (2') dobimo takoj oceno $\chi(G) \geqslant \omega(G)$, kjer je $\omega(G)$ moč največjega skupka (klike, polnega podgrafa) grafa G. Enakost v oceni velja na primer za polni graf $\chi(K_n) = \omega(K_n) = n$.
Po drugi strani pa je Tutte pokazal, da obstajajo grafi z $\omega(G) = 2$ in poljubno velikim $\chi(G)$.
Še močnejši je Erdös-Lovászev izrek, ki pravi, da za vsak par naravnih števil r in s obstaja r-barven graf, v katerem dolžina najkrajšega cikla presega s.



$\chi(C_{2k}) = 2$ $\chi(C_{2k+1}) = 3$ $\chi(W_{2k}) = 4$ $\chi(W_{2k+1}) = 3$

Barvnost grafa – lastnosti

IZREK (Roy, Gallai)

Naj bo $G' = (V, A(E))$ usmerjeni graf, ki ga dobimo tako, da poljubno usmerimo povezave grafa $G = (V, E)$ in naj bo k dolžina najdaljšega enostavnega sprehoda po G', potem je

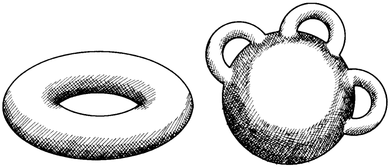
$$\chi(G) \leqslant k + 1$$

IZREK (König)

$\chi(G) \leqslant 2$ natanko takrat, ko graf G ne vsebuje lihih ciklov.

Dokaz: $\chi(G) = 1$ natanko takrat, ko G nima nobene povezave.
Poglejmo še primer $\chi(G) = 2$. Vzemimo neko 2-barvanje (črno/belo) grafa G. Tedaj gre vsak cikel izmenoma skozi črna/bela vozlišča – torej je sod.
Naj bodo vsi cikli sodi in G povezan. Pobarvajmo izbrano vozlišče v s črno barvo, nato vse njene sosede z belo, pa vse njihove napobarvane sosede s črno . . . Pri tem ne moremo dobiti dveh sosednjih vozlišč iste barve (nepravilnega barvanja), ker bi sicer v grafu G obstajal lih cikel. □

Barvnost grafov na ploskvah



rod ploskve = število "ročajev"

Za orientabilne ploskve višjih rodov so Heawood (1890), Heffter (1891), Ringel in Youngs (1968) pokazali, da je vsak graf, ki ga lahko vložimo v orientabilno ploskev roda $r > 0$, mogoče pobarvati z največ $\frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 48r})$ barvami.

Leta 1976 sta K. Appel in W. Haken, s pomočjo računalnika, pozitivno odgovorila na več kot sto let star problem štirih barv: vsak ravninski graf je mogoče pobarvati z največ štirimi barvami.
Izrek štirih barv torej pravi, da prejšna trditev velja tudi za $r = 0$.
Izrek štirih barv je prvi izrek, katerega dokaz je tako obsežen, da človek ne more "peš" preveriti njegove pravilnosti.

Barvnost grafa – lastnosti

Zanimivi sta tudi zvezi med barvnostjo grafa G in njegovega komplementa $\overline{G}$, ki sta ju našla Nordhaus in Gaddum:

$$\lfloor 2\sqrt{n} \rfloor \leqslant \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1$$

$$n \leqslant \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \leqslant \lceil (\frac{n+1}{2})^2 \rceil$$

Omenimo še znani Brooksov izrek:
V povezanem grafu G, ki ni poln graf ali lih cikel, z $\Delta(G) \geqslant 3$ velja

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G)$$

Torej je vsak enostaven kubični graf, različen od K_4, 3−obarvljiv.

Algoritmi za barvanje vozlišč grafa

Raziskave na področju zahtevnosti algoritmov so pokazale, da sodi problem barvanja vozlišč grafa med NP-polne probleme.
Iz literature so znani postopki usmerjenega prebora, ki z domiselnim odmetavanjem neperspektivnih delnih barvanj lahko ponavadi v zmernem času določijo minimalna barvanja grafov s tja do 100 vozlišči. Za najuspešnejše med njimi so se izkazale izpeljanke zamisli, ki jo je že leta 1949 uporabil Zykov v zvezi s kromatičnimi polinomi.

Postopek Zykova

Vzemimo v grafu, ki ga želimo pobarvati poljubni vozlišči u in v, ki nista krajišči iste povezave – $(u : v) \notin E$. Tedaj je

$$\chi(G) = \min(\chi(G(u = v)), \chi(G \cup \{(u : v)\}))$$

kjer je $G(u = v)$ graf, ki ga dobimo, če v grafu G združimo vozlišči u in v v eno vozlišče (pri tem morebitne večkratne povezave nadomestimo z enkratnimi), in je $G \cup \{(u : v)\}$ graf, ki ga dobimo, če grafu G dodamo povezavo $(u : v)$.
Graf $G(u = v)$ ustreza primeru, ko sta v minimalnem barvanju vozlišči u in v enako pobarvani, graf $G \cup \{(u : v)\}$ pa primeru, ko sta različno pobarvani.
Postopek rekurzivno ponavljamo. Rekurzivni prebor se izteče, ker se pri grafih $G(u = v)$ zmanjša število vozlišč, pri grafih $G \cup \{(u : v)\}$ pa poveča število povezav (postajajo vse bolj polni). Razgradnja se ustavi na polnih grafih, za katere barvnosti poznamo.

Hedetniemijevi pravili

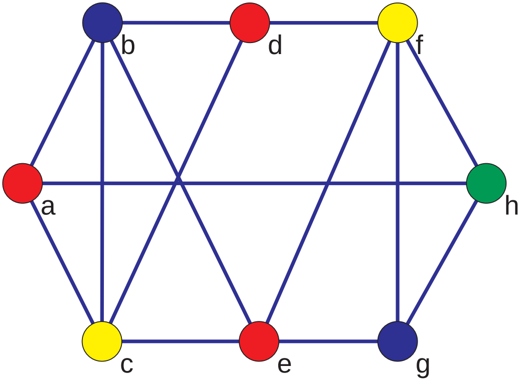
Tako dobimo drevo, katerega vozlišča so grafi, listi pa polni grafi. Stopnja polnega grafa – lista je enaka številu barv v barvanju, ki ga določa pot po drevesu od vrha do lista. Posamezni postopki se razlikujejo v načinu pregledovanja tega drevesa in v pravilih odmetavanja neperspektivnih vej.
Za zelo učinkoviti sta se izkazali naslednji, sicer preprosti, Hedetniemijevi pravili:

P1. Če v grafu obstaja vozlišče u, ki je sosednje z vsemi ostalimi, potem bo v vsakem barvanju vozlišče u imelo barvo drugačno od vseh drugih vozlišč.

P2. Če v grafu obstajata vozlišči u in v, taki da si vsi sosedi vozlišča u tudi sosedi vozlišča v, potem obstaja minimalno barvanje grafa, v katerem sta obe vozliščii enako pobarvani.

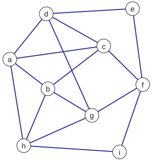
Obe pravili omogočata, da vozlišče u "izločimo" iz grafa – nadaljnjega pregledovanja.

Primer 1

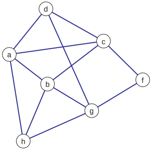


Uporabimo pravilo Zykova na vozliščih e in h. V obeh primerih ($G(e = h)$ in $G \cup \{(e : h)\}$) dobimo nov graf, ki vsebuje polni graf na 4 vozliščih K_4. Ker oba ta grafa lahko pobarvamo s 4 barvami, je barvnost začetnega grafa 4.

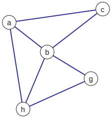
Primer 2



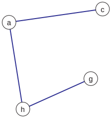
P2
$N(e) \subseteq N(c)$
$\Rightarrow b(e) = b(c)$
$N(i) \subseteq N(g)$
$\Rightarrow b(i) = b(g)$



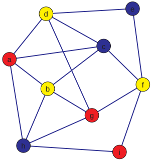
P2
$N(f) \subseteq N(b)$
$\Rightarrow b(f) = b(b)$
$N(d) \subseteq N(b)$
$\Rightarrow b(d) = b(b)$



P1
$b(b) = 1$



dvodelni graf
$b(c) = 2$,
$b(a) = 3$,
$b(h) = 2$,
$b(g) = 3$



$b(d) = 1$,
$b(f) = 1$,
$b(i) = 3$,
$b(e) = 2$

Približna barvanja

Kaj pa, če je graf prevelik ali pa je cena za iskanje minimalnega barvanja s postopkom prebora prevelika? Tedaj se moramo zateči k približnim postopkom barvanja in se s tem odpovedati zagotovilu, da je dobljeno barvanje minimalno; čeprav lahko slednje včasih pokažemo, na primer tako da najdemo polni podgraf na $\chi(G)$ vozliščih.
Večina približnih postopkov za barvanje vozlišč grafa zadošča shemi postopkov zaporednega barvanja.
Naj bo B množica barv. Z $* \notin B$ označimo dodatno barvo nepobarvano. Delno barvanje imenujemo vsako preslikavo $b : V \to B \cup \{*\}$, ki zadošča pogoju

$$\forall u, v \in V : ((u : v) \in E \wedge b(u), b(v) \in B \Rightarrow b(u) \neq b(v))$$

Množica prostih barv v vozlišču v za delno barvanje b je tedaj $B(v; b) = B \backslash b(\mathrm{ext}(E(v)) \backslash \{v\})$.

Postopki zaporednega barvanja

Pobarvanje vozlišča v z barvo a v delnem barvanju b pa lahko opišemo z operacijo:

$$S(v, a; b)(u) = \begin{cases} a & u = v \\ b(u) & u \neq v \end{cases}$$

S temi pojmi lahko opišemo postopke zaporednega barvanja takole:

for all $v \in V$ **do** $b(v) := *$;
while $\exists v : b(v) = *$ **do begin**
    izberi prosto barvo $a \in B(v; b)$;
    $b := S(v, a; b)$
end;

Zato, da bi opisani postopek vedno tekel, mora biti vseskozi $B(v; b) \neq \emptyset$. Za to zadostuje, če je $\mathrm{card}(B) = \Delta(G) + 1$.

Postopki zaporednega barvanja

Linearno uredimo množico B. Barvanje b je zbito za dano urejenost barv, če za vsako vozlišče v velja, da ni med zanj prostimi barvami nobene manjše od barve vozlišča v

$$a \in B(v; b) \Rightarrow b(v) < a$$

Vsako barvanje lahko zbijemo tako, da postopoma v vozliščih, ki ne zadoščajo temu pogoju opravimo zameno $b := S(v, a; b)$, kjer je a najmanjša barva iz $B(v; b)$. Barvitost barvanja b se pri tem kvečjemu manjša.
Postopki zaporednega barvanja se med seboj razlikujejo po pravilu izbire naslednjega kandidata za barvanje in po načinu izbire barve, s katero ga pobarvamo.

Izbira proste barve

Kako izberemo prosto barvo? Običajno ne razmetavamo z barvami in jih zato raje po potrebi dodajamo. Torej:

- Če za dano vozlišče obstaja prosta barva, izberemo eno izmed njih: najmanjšo, kar da zbito barvanje; ali naključno, kar omogoča večkratno poskušanje; ali pa najmanjkrat uporabljeno, kar da razmeroma enakomerno pobarvan graf;
- Če ima dano vozlišče sosede vseh dotlej uporabljenih barv, dopolnimo množico barv z novo barvo. Včasih se temu lahko izognemo, tako da s Kempejevimi zamenami (premene dveh barv) sprostimo neko barvo na sosedih danega vozlišča.

Vsakemu zaporednemu barvanju ustreza zaporedje $\pi : 1..n \rightarrow V$ izbir vozlišč, ki popisuje vrstni red barvanja. To zaporedje je v bistvu permutacija vozlišč.

Izrek o zaporednih barvanjih

IZREK

Za vsak graf G obstaja tako zaporedje barvanja π, da da ustrezno zaporedno barvanje, pri čemer vselej izberemo najmanjšo prosto barvo, minimalno zbito barvanje vozlišč danega grafa.

Dokaz: Naj bo b zbito minimalno barvanje grafa G. Uredimo vozlišča grafa po naraščajočih vrednostih pripadajočih barv. Dobili smo iskano zaporedje. □

Torej je osnovno vprašanje pri zaporednih postopkih barvanja: Kako najti "ta pravi" vrstni red barvanja ?

Welsh-Powellov postopek

Welsh-Powellov postopek temelji na naslednjem pravilu: vrstni red barvanja je določen s padajočim vrstnim redom stopenj vozlišč grafa. Zanj je mogoče pokazati oceno.

IZREK

Naj bo $d_1 \geqslant d_2 \geqslant d_3 \ldots \geqslant d_n$ *padajoče zaporedje stopenj vozlišč grafa* G. *Tedaj je*

$$\chi(G) \leqslant \mathrm{WP}(G) = \max\{i : i \leqslant d_i + 1\}$$

Brélazov postopek

Pri Brélazovem postopku je vrstni red barvanja π določen takole:

vsa vozlišča imajo vrednost 0;
vozlišču, ki ima največjo stopnjo, postavi vrednost na 1;
for $i := 1$ **to** n **do begin**
  $\pi(i) :=$ vozlišče z največjo vrednostjo, ki še ni v π;
  vsem sosedom vozlišča $\pi(i)$ povečaj vrednost za 1
end;

Brélazov postopek temelji na pravilu takojšnjega barvanja poln(ejš)ih podgrafov. Zanj je mogoče pokazati trditev.

IZREK

Brélazov postopek je točen za dvodelne grafe.

Zanimiv, a nekoliko zapletenejši, je tudi Szekeres-Wilfov postopek.

Barvanje povezav

Podobne pojme lahko definiramo tudi za barvanja povezav. Preslikavo $b : E \to B$ imenujemo barvanje povezav grafa $G = (V, E)$, če nobeni povezavi, ki imata skupno krajišče nista enako pobarvani

$$\forall p, q \in E : (p \neq q \wedge b(p) = b(q) \Rightarrow \mathrm{ext}(p) \cap \mathrm{ext}(q) = \emptyset)$$

Najmanjše število barv potrebnih za obarvanje grafa po povezavah imenujemo barvni indeks grafa in označimo s χ'.

IZREK (Vizing, 1964)

Za enostavni graf $G = (V, E)$ *velja*

$$\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$$