

Dirichletovo načelo

Dirichletovo načelo: Če n predmetov razporedimo v k škatel, kjer je $n > k$, tedaj imamo v vsaj eni škatli vsaj dva predmeta.

Posplošeno Dirichletovo načelo: Če n predmetov razporedimo v k škatel in je $n > k \cdot r$, tedaj je vsaj v eni škatli vsaj $r + 1$ predmetov.

1. V kvadratu s stranico 2 izberemo 5 točk. Pokažite, da sta vsaj dve med njimi oddaljeni med seboj za največ $\sqrt{2}$!
2. V tabelo velikosti 5×5 vstavljamo številke $-1, 0$ in 1 . Pokažite, da sta vsaj dve izmed vsot po vrsticah, stolpcih in obeh glavnih diagonalah enaki, ne glede na to, kako napolnimo tabelo.
3. V ravnini imamo 5 točk s celoštevilskimi koordinatami. Pokažite, da ima vsaj eno razpolovišče daljice, ki ima krajišča v tej množici, celoštevilске koordinate.
4. Naj bo n naravno število in $A \subseteq \mathbb{Z}$ moči $n + 1$. Pokažite, da A vsebuje par števil, katerih razlika je deljiva z n .
5. Naj bo n liho naravno število in $A \subseteq \mathbb{Z}$ moči $\frac{n+3}{2}$. Pokažite, da A vsebuje tak par števil, da je ali njuna vsota ali njuna razlika deljiva z n .
6. V nekem podjetju je zaposlenih 37 oseb. Pokažite, da obstaja mesec, v katerem imajo vsaj štirje zaposleni rojstni dan.
7. V sobi pravokotne oblike dolžine $3m$, širine $4m$ in višine $3m$ leta 110 muh. Pokažite, da v vsakem trenutku obstajajo 4 muhe, ki se nahajajo znotraj krogle s polmerom 90 cm .
8. V paketu običajnih igralnih kart je 52 kart. Vsaka karta je določena z barvo in vrednostjo. Barve so štiri: srce, kara, križ, pik. Vrednosti pa so števila od 2 do 10 in figure fant, dama, kralj, as; vsaka barva ima torej 13 vrednosti.

Imamo paket običajnih kart. Koliko najmanj kart moramo izvleči, da zagotovo dobimo

- (a) vsaj tri karte iste barve?
- (b) vsaj tri križe?
- (c) vsaj tri križe in tri srca?
- (d) vsaj po dve karti vsake barve?