

Grafi: stopnje vozlišč, drevesa, povezanost

1. Na zabavi se je zbralo 13 ljudi. Vsak je s seboj prinesel 3 darila, ki bi jih rad izmenjal s tremi drugimi udeleženci zabave. Ali je to izvedljivo? Predstavite kot problem iz teorije grafov in ga rešite.
2. (S. Klavžar, Presek, letnik 26, številka 2, strani 72-78) V cirkuški predstavi nastopajo 4 pari klovnov: 2 rdeča, 2 modra, 2 zelena in 2 rumena. Med predstavo se zaletavajo med seboj, a nikoli se ne zaletita dva klovnova iste barve. Nekega dne je 1. rdeči klovn vprašal ostalih 7, v koliko drugih klovnov so se zaleteli. Dobil je same različne odgovore. V koliko klovnov se je med predstavo zaletel drugi rdeči klovn? Nalogo zapišite v jeziku teorije grafov in rešite.
3. Naj bo $G = (V, E)$ enostaven graf in $|V| \geq 2$. Pokažite, da G vsebuje vsaj dve vozlišči, ki imata isto stopnjo.
4. Naj bo $G = (V, E)$ enostaven graf z minimalno stopnjo vsaj $\lfloor n/2 \rfloor$, kjer je $n = |V|$. Pokažite, da je potem G povezan.
5. Naj bo $G = (V, E)$ enostaven graf. Tedaj je G povezan ali pa je povezan njegov komplement.
6. Naj bo $G = (V, E)$ povezan graf. Povezava $e \in E$ je *most*, če $G \setminus \{e\}$ ni več povezan. Pokažite: če ima G most, potem ima vsaj dve vozlišči lihe stopnje.
7. Poiščite vsa neizomorfna drevesa na šestih vozliščih.
8. Naj bo T drevo na 17 točkah, pri katerem imajo vsa vozlišča stopnjo ena ali štiri. Koliko vozlišč ima stopnjo štiri?
9. Naj bo T drevo. Dana so števila vozlišč n_i stopnje i za $i = 2, \dots, k$ v T . Koliko ima T listov?
10. Pokažite, da ima vsako drevo vsaj dva lista.