Kombinacije s ponavljanjem, pravilo vključitev in izključitev, porazdelitev n označenih elementov po kalupu

1. Sladoledar ima na voljo 8 različnih okusov sladoleda. Na koliko različnih načinov lahko sestavi sladoledno kupo iz 6 kepic?

2. Koliko je petmestnih števil, pri katerih so števke urejene nepadajoče? To pomeni, da štejemo števila n oblike

$$n = 10^4 \cdot a_4 + 10^3 \cdot a_3 + 10^2 \cdot a_2 + 10 \cdot a_1 + a_0,$$

   kjer je $1 \leq a_4 \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0$.

3. Koliko števil med 1 in 1000 je deljivih vsaj z enim od števil 6, 7 ali 10?

4. Koliko je petmestnih števil, pri katerih je
   (a) vsaj ena števka enaka 9?
   (b) vsaj ena števka enaka 9 ali 8?
   (c) vsaj ena števka enaka 9 in vsaj ena števka enaka 8?

5. Koliko je kombinacij reda 10 iz elementov multimnožice $\{3a, 4b, 5c\}$? Torej, ponavljanje je dovoljeno, vendar a ponovimo največ trikrat, b ponovimo največ štirikrat in c ponovimo največ petkrat.

6. Koliko različnih besed lahko sestavimo iz črk besede BANANA ?

7. Koliko je različnih poti od točke $(2, 1)$ do točke $(7, 4)$, če je pot sestavljena iz odsekov dolžine 1, ki gredo lahko od začetne točke le v desno ali navzgor? Koliko takšni poti gre skozi točko $(4, 3)$?

8. Na koliko načinov lahko permutiramo črke O, B, Z, O, R, I, L, U, N, A, S, I, J, E
   (a) brez dodatnih omejitev?
   (b) tako, da je A vedno pred Z?
   (c) tako, da ni dveh zaporednih O-jev?
   (d) tako, da soglasniki nastopajo po abecednem vrstnem redu?

9. V razvoju multinoma poiščite koeficiente pred določenimi členi:
   (a) v razvoju $(a + b + c)^7$ koeficient pred členom a^3bc^3,
   (b) v razvoju $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^8$ koeficient pred členom $x_1^2x_2x_4^3x_5^2$,
   (c) v razvoju $(4x_1 - 3x_2 - 2x_3)^{13}$ koeficient pred členom $x_1^3x_2x_3^9$.

10. Na koliko načinov lahko razdelimo razdelimo n različnih kroglic v enake škatle tako, da je v k_i škatlah natanko i kroglic za $i = 1, 2, \ldots, n$? Pri tem je $\sum_{i=1}^{n} i \cdot k_i = n$.

11. Koliko je permutacij, ki imajo k_i ciklov dolžine i za $1 \leq i \leq n$? Pri tem je $\sum_{i=1}^{n} i \cdot k_i = n$.