Primer: Datoteka `potrosnja2.dta` vsebuje podatke za ZDA v obdobju 1960–1990, in sicer vrednost osebne porabe (*C*) in razpoložljivega dohodka (*Y*). Obe spremenljivki sta izraženi v mlrd USD po cenah iz leta 1987.

a) Zapišite Koyckovo predpostavko in jo razložite ter z njeno pomočjo iz modela neskončno razporejenih odlogov izpeljite avtoregresijski model.
b) Ocenite avtoregresijski model iz prejšnje točke in na podlagi dobljenih ocen zapišite ocenjeni model razporejenih odlogov. Na konkretnih izračunih pojasnite začetni in dolgoročni multiplikator ter po enega od vmesnih in odsekanih.
c) Z ustreznimi testi preverite, ali je v proučevanem avtoregresijskem modelu prisotna avtokorelacija prvega reda.
d) Zapišite in pojasnite model postopnega prilagajanja. Izpeljani avtoregresijski model ocenite in razložite dobljene rezultate.
e) Zapišite in pojasnite model prilagojenih pričakovanj. Izpeljani avtoregresijski model ocenite in razložite dobljene rezultate.

Koyckov model (geometrijska shema razporejenih odlogov)

Pri ocenjevanju modela neskončno razporejenih odlogov si lahko pomagamo tudi z različnimi predpostavkami o razporeditvi vplivov pojasnjevalne spremenljivke na odvisno. Tako je Koyck predpostavljal, da so vsi vplivi odložene pojasnjevalne spremenljivke enako predznačeni in se v času zmanjšujejo po geometrijskem zaporedju. To pomeni, da vrednosti regresijskih koeficientov odložene pojasnjevalne spremenljivke z oddaljevanjem v preteklost (torej s povečevanjem dolžine odloga) geometrijsko upadajo. Omenjeno predpostavko lahko zapišemo takole:

$$\beta_k = \beta_0 \lambda^k; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

pri čemer parameter λ, ki ga imenujemo tudi stopnja upadanja vplivov, zavzema vrednosti med 0 in 1. Vrednosti regresijskih koeficientov pri odlogih so odvisne od regresijskega koeficienta β_0, ki predstavlja vpliv tekoče pojasnjevalne na tekočo odvisno spremenljivko in stopnje upadanja λ. Čim bližja je slednja vrednosti ena (nič), tem počasnejše (hitrejše) je upadanje vplivov odložene pojasnjevalne spremenljivke na odvisno.

Zapišimo sedaj vsoto vseh regresijskih koeficientov β_k:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_0 \lambda^k = \beta_0 \left(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \ldots\right). \tag{2}$$

Vsota neskončne geometrijske vrste (izraz v oklepaju) je enaka $1/(1-\lambda)$, tako da lahko vsoto regresijskih koeficientov, ki predstavlja dolgoročni multiplikator, v modelu neskončno razporejenih odlogov izračunamo po naslednjem obrazcu:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \beta_0 \frac{1}{1-\lambda}. \tag{3}$$

Upoštevaje izraz (1), lahko model neskončno razporejenih odlogov zapišemo takole:

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_0 \lambda x_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 x_{t-2} + \ldots + u_t \,. \tag{4}$$

Ocenjevanje parametrov tako zapisanega modela z metodo najmanjših kvadratov seveda ni možno, saj model ni linearen v parametrih, poleg tega pa bi jih bilo potrebno oceniti neskončno mnogo. Zato je Koyck predlagal rešitev oziroma transformacijo modela, ki jo predstavljamo v nadaljevanju.

Model (4) najprej odložimo za eno časovno enoto:

$$y_{t-1} = \alpha + \beta_0 x_{t-1} + \beta_0 \lambda x_{t-2} + \beta_0 \lambda^2 x_{t-3} + \ldots + u_{t-1} \,. \tag{5}$$

Nato izraz (5) pomnožimo s stopnjo upadanja λ in dobljeni zapis odštejemo od izraza (4):

$$\begin{aligned} \lambda y_{t-1} &= \lambda \alpha + \beta_0 \lambda x_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 x_{t-2} + \beta_0 \lambda^3 x_{t-3} + \ldots + \lambda u_{t-1}, \\ y_t - \lambda y_{t-1} &= \alpha(1-\lambda) + \beta_0 x_t + (u_t - \lambda u_{t-1}), \end{aligned} \tag{6}$$

oziroma, če preuredimo:

$$y_t = \alpha(1-\lambda) + \beta_0 x_t + \lambda y_{t-1} + (u_t - \lambda u_{t-1}) \,. \tag{7}$$

S pomočjo Koyckove transformacije smo torej model neskončno razporejenih odlogov spremenili v avtoregresijski model, kjer kot pojasnjevalna spremenljivka nastopa odložena odvisna spremenljivka.

V povsem splošni obliki lahko izraz (7) zapišemo:

$$y_t = \gamma_1 + \gamma_2 x_t + \gamma_3 y_{t-1} + v_t \,, \tag{8}$$

pri čemer velja:

$$\gamma_1 = \alpha(1-\lambda); \qquad \gamma_2 = \beta_0; \qquad \gamma_3 = \lambda; \qquad v_t = u_t - \lambda u_{t-1} \,. \tag{9}$$

Regresijski koeficient β_0 imenujemo kratkoročni oziroma začetni multiplikator in pove, za koliko se v povprečju spremeni odvisna spremenljivka v tekoči časovni enoti, če se v isti časovni enoti poveča pojasnjevalna spremenljivka za eno enoto. Izraz $\beta_0 \dfrac{1}{1-\lambda}$ predstavlja dolgoročni multiplikator in pove, za koliko enot se v povprečju spremeni odvisna spremenljivka na dolgi rok zaradi spremembe pojasnjevalne spremenljivke za eno enoto.

Če primerjamo modela neskončno razporejenih odlogov v splošnem z modelom (7), lahko vidimo dve bistveni poenostavitvi, do katerih privede uporaba Koyckove transformacije:

– v modelu (7) je potrebno oceniti le tri parametre (α, β in λ), v modelu neskončno razporejenih odlogov pa je regresijskih koeficientov neskončno mnogo ter

– težav zaradi multikolinearnosti ni več, saj smo spremenljivke x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, … nadomestili z odloženo odvisno spremenljivko.

Poleg omenjenih poenostavitev pa moramo pri ocenjevanju avtoregresijskega modela (7), ki smo ga izpeljali na podlagi Koyckove transformacije, upoštevati tudi naslednje okoliščine:

– Glede na to, da je spremenljivka y_t, posledično pa seveda tudi spremenljivka y_{t-1} slučajna spremenljivka, v modelu (7) nastopa slučajna pojasnjevalna spremenljivka. Kot vemo iz teorije, ena izmed predpostavk klasičnega linearnega regresijskega modela zahteva, da so pojasnjevalne spremenljivke neslučajne, če pa že so slučajne, pa morajo biti neodvisne od slučajne spremenljivke. Zato je v primeru avtoregresijskega modela potrebno ugotoviti, ali je temu pogoju zadoščeno.

– V avtoregresijskem modelu nastopa slučajna spremenljivka v_t, ki je opredeljena kot $u_t - \lambda u_{t-1}$, tako da so njene značilnosti odvisne od tega, kakšne predpostavke veljajo za slučajno spremenljivko u_t. Izkaže se, da so vrednosti slučajne spremenljivke v_t avtokorelirane, četudi so vrednosti prvotne slučajne spremenljivke u_t medsebojno nepovezane. To pomeni, da moramo biti pri ocenjevanju avtoregresijskega modela še posebej pozorni na problem avtokorelacije.

■

Model postopnega (delnega) prilagajanja

Avtoregresijski model, ki ga dobimo na podlagi Koyckove transformacije, je rezultat povsem algebraične izpeljave, kar pomeni, da ni ustrezno vsebinsko oziroma teoretično podprt. To pomanjkljivost lahko odpravimo, če upoštevamo t.i. model postopnega (delnega) prilagajanja. Izhajamo iz modela, v katerem je želena (ravnotežna) oziroma dolgoročna raven odvisne spremenljivke linearna funkcija pojasnjevalne spremenljivke. V konkretnem primeru dobimo:

$$C_t^* = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t . \tag{10}$$

Dolgoročna oziroma ravnotežna raven osebne porabe je torej linearna funkcija razpoložljivega dohodka. Ker dolgoročne vrednosti osebne porabe C^* niso neposredno poznane, si pomagamo z modelom delnega prilagajanja:

$$C_t - C_{t-1} = \delta(C_t^* - C_{t-1}), \qquad 0 < \delta \le 1. \tag{11}$$

Sprememba vrednosti porabe v časovni enoti t je enaka določenemu deležu δ (imenujemo ga koeficient prilagajanja) želene spremembe vrednosti porabe v tej časovni enoti. Če v izraz (11) vstavimo izraz (10), dobimo:

$$C_t - C_{t-1} = \delta(\beta_0 + \beta_1 Y_t + u - C_{t-1})\,; \qquad (12)$$

kar lahko ustrezno preuredimo v:

$$C_t = \delta\beta_0 + \delta\beta_1 Y_t + (1-\delta)C_{t-1} + \delta u_t\,. \qquad (13)$$

V povsem splošni obliki lahko izraz (13) zapišemo kot:

$$y_t = \gamma_1 + \gamma_2 x_t + \gamma_3 y_{t-1} + v_t\,, \qquad (14)$$

pri čemer velja:

$$\gamma_1 = \delta\beta_0; \qquad \gamma_2 = \delta\beta_1; \qquad \gamma_3 = (1-\delta); \qquad v_t = \delta u_t\,. \qquad (15)$$

Model (10) predstavlja dolgoročno oziroma ravnotežno funkcijo porabe, avtoregresijski model (14) pa kratkoročno funkcijo porabe. Regresijski koeficient β_1 predstavlja dolgoročno mejno nagnjenost k porabi, γ_2 pa kratkoročno mejno nagnjenost k porabi. Iz izraza (15) sledi, da β_1 lahko izračunamo tako, da kratkoročno mejno nagnjenost delimo s koeficientom prilagajanja δ. Le-ta pove, kolikšen delež vrzeli med želeno in dejansko vrednostjo porabe je odpravljen v posamezni časovni enoti.

■

Model prilagojenih pričakovanj (model učenja na napakah)

Pri uporabi modela prilagojenih pričakovanj bomo izhajali iz modela, v katerem je odvisna spremenljivka linearna funkcija pričakovane dolgoročne (ravnotežne) ravni pojasnjevalne spremenljivke. V konkretnem primeru bi lahko zapisali:

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t^* + u_t\,. \qquad (16)$$

Osebna poraba je torej linearna funkcija pričakovane dolgoročne oziroma ravnotežne ravni razpoložljivega dohodka. Ker pričakovanega razpoložljivega dohodka Y^* neposredno ne poznamo, si pomagamo z modelom prilagojenih pričakovanj:

$$Y_t^* - Y_{t-1}^* = \gamma(Y_t - Y_{t-1}^*), \qquad 0 < \gamma \le 1. \qquad (17)$$

Pričakovanja glede razpoložljivega dohodka so v vsaki časovni enoti "popravljena" z določenim deležem (imenujemo ga koeficient pričakovanj) vrzeli med dejansko vrednostjo razpoložljivega dohodka v tekoči časovni enoti in njegovo predhodno pričakovano vrednostjo.

Model (17) lahko zapišemo tudi kot:

$$Y_t^* = \gamma Y_t + (1-\gamma)Y_{t-1}^*\,, \qquad (18)$$

kar pomeni, da je pričakovana vrednost razpoložljivega dohodka v posamezni časovni enoti enaka tehtani aritmetični sredini dejanske vrednosti razpoložljivega dohodka v tej časovni enoti in njegove pričakovane vrednosti v predhodni časovni enoti, pri čemer sta γ in $1-\gamma$ pripadajoči uteži.

V primeru, da je γ enak 1, velja $Y_t^* = Y_t$, kar pomeni, da so pričakovanja glede razpoložljivega dohodka realizirana nemudoma in v popolnosti. Če pa imamo drugo skrajnost, torej $\gamma = 0$, pa velja $Y_t^* = Y_{t-1}^*$, kar pomeni, da so pričakovanja statična in se ne bodo spreminjala.

Če izraz (18) vstavimo v enačbo (16), dobimo:

$$C_t = \beta_0 + \beta_1(\gamma Y_t + (1-\gamma)Y_{t-1}^*) + u_t = \beta_0 + \beta_1 \gamma Y_t + \beta_1(1-\gamma)Y_{t-1}^* + u_t \,. \tag{19}$$

Model (16) zapišemo v predhodni časovni enoti:

$$C_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1}^* + u_{t-1} \tag{20}$$

in iz njega izrazimo pričakovano vrednost razpoložljivega dohodka Y_{t-1}^*:

$$Y_{t-1}^* = \frac{C_{t-1} - \beta_0 + u_{t-1}}{\beta_1}, \tag{21}$$

ga vstavimo v enačbo (19) in z malce izpeljave dobimo:

$$C_t = \gamma\beta_0 + \gamma\beta_1 Y_t + (1-\gamma)C_{t-1} + u_t - (1-\gamma)u_{t-1} \,. \tag{22}$$

V povsem splošni obliki lahko izraz (22) zapišemo kot:

$$y_t = \xi_1 + \xi_2 x_t + \xi_3 y_{t-1} + v_t, \tag{23}$$

pri čemer velja:

$$\xi_1 = \gamma\beta_0; \qquad \xi_2 = \gamma\beta_1; \qquad \xi_3 = (1-\gamma); \qquad \xi_t = u_t - (1-\gamma)u_{t-1} \,. \tag{24}$$

V skladu s teorijo porabe lahko pričakovani dolgoročni razpoložljivi dohodek opredelimo kot permanentni oziroma stalni razpoložljivi dohodek. V skladu s tem regresijski koeficient β_1 v modelu (16) predstavlja mejno nagnjenost k porabi permanentnega dohodka, regresijski koeficient ξ_2 v avtoregresijskem modelu (23) pa mejno nagnjenost k porabi tekočega dohodka. Iz izraza (24) sledi, da β_1 lahko izračunamo tako, da mejno nagnjenost k porabi tekočega dohodka delimo s koeficientom pričakovanj γ.

■

Izpis rezultatov obdelav v programskem paketu Stata:

```
. tsset year
        time variable:  year, 1960 to 1990
                delta:  1 unit

. regress c y

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      31
-------------+------------------------------           F(  1,    29) = 8830.35
       Model |  10704439.9     1  10704439.9           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  35154.7449    29  1212.23258           R-squared     =  0.9967
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9966
       Total |  10739594.7    30  357986.489           Root MSE      =  34.817

------------------------------------------------------------------------------
           c |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           y |   .9224173   .0098161    93.97   0.000     .9023412    .9424935
       _cons |  -39.55193   24.45265    -1.62   0.117    -89.56321    10.45935
------------------------------------------------------------------------------

. regress c y l.c

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      30
-------------+------------------------------           F(  2,    27) = 5761.50
       Model |  9871307.09     2  4935653.55           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  23129.8458    27  856.660955           R-squared     =  0.9977
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9975
       Total |  9894436.94    29  341187.481           Root MSE      =  29.269

------------------------------------------------------------------------------
           c |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           y |   .4555839   .1359322     3.35   0.002      .176674    .7344938
             |
           c |
         L1. |   .5210732   .1502645     3.47   0.002     .2127558    .8293905
             |
       _cons |  -17.89849   23.59184    -0.76   0.455    -66.30495    30.50797
------------------------------------------------------------------------------

. scalar T=e(N)
. matrix V=e(V)
. scalar varb=V[2,2]

. display T, varb
30 .02257943

. regress ec l.ec, nocons

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      29
-------------+------------------------------           F(  1,    28) =   12.12
       Model |  6969.43374     1  6969.43374           Prob > F      =  0.0017
    Residual |  16098.1117    28  574.932559           R-squared     =  0.3021
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.2772
       Total |  23067.5454    29   795.4326            Root MSE      =  23.978

------------------------------------------------------------------------------
          ec |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          ec |
         L1. |   .5491917    .157737     3.48   0.002      .226082    .8723014
------------------------------------------------------------------------------
```

```
. scalar rho=_b[l.ec]
. display rho
.54919173

. scalar h=rho*sqrt(T/(1-T*varb))

. display h, invnormal(0.95), 1-normal(h)
5.2959138 1.6448536 5.921e-08

. regress ec y l.c l.ec

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      29
-------------+------------------------------           F(  3,    25) =    4.17
       Model |  7694.22168     3  2564.74056           Prob > F      =  0.0159
    Residual |  15371.1754    25  614.847017           R-squared     =  0.3336
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.2536
       Total |  23065.3971    28  823.764182           Root MSE      =  24.796

------------------------------------------------------------------------------
          ec |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           y |   .1350957   .1243967     1.09   0.288     -.121104    .3912955
             |
           c |
         L1. |  -.1487069   .1369076    -1.09   0.288    -.4306733    .1332596
             |
          ec |
         L1. |   .6015586   .1701725     3.53   0.002     .2510817    .9520355
             |
       _cons |  -11.54498    21.9328    -0.53   0.603    -56.71643    33.62646
------------------------------------------------------------------------------

. scalar lm=e(N)*e(r2)

. display lm, invchi2tail(1,0.05), chi2tail(1,lm)
9.6739036 3.8414588 .00186904

. qui regress c y l.c
. estat bgodfrey, nomiss0

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation
---------------------------------------------------------------------------
    lags(p)  |          chi2               df                 Prob > chi2
-------------+-------------------------------------------------------------
       1     |          9.674               1                   0.0019
---------------------------------------------------------------------------
                        H0: no serial correlation

. estat bgodfrey

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation
---------------------------------------------------------------------------
    lags(p)  |          chi2               df                 Prob > chi2
-------------+-------------------------------------------------------------
       1     |          9.797               1                   0.0017
---------------------------------------------------------------------------
                        H0: no serial correlation
```

■