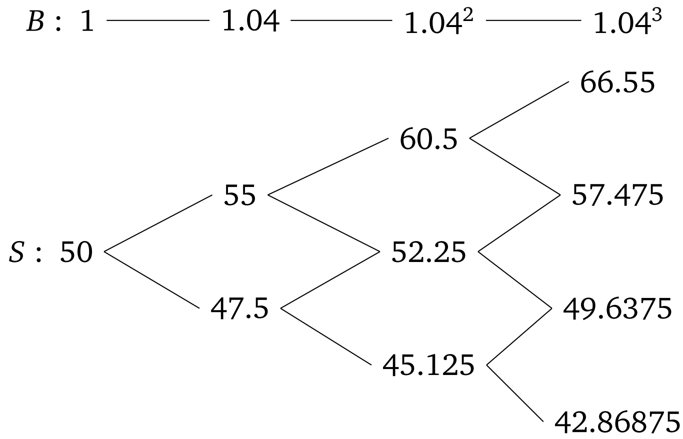
Pisni izpit: 31. avgust 2010

1. naloga

(a) **[4 točke]**

Za podatke $S_0 = 50$, $T = 3$, $u = 1.1$, $d = 0.95$ in $R = 4\%$ narišemo drevo dogodkov.



Ker računamo do prihodnosti nevtralno verjetnost, za numerar izberemo bančni račun.

Do prihodnosti nevtralni prehodni verjetnosti se s časom ne spreminjata in znašata $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{3}{5}$ ter $1 - q = \frac{2}{5}$.

(b) **[7 točk]**

Instrument vrednotimo z vzvratno indukcijo. Pri vsakem vozlišču drevesa primerjamo izplačilo ob takojšnji izvršitvi opcije ter vrednost instrumenta, če se odločimo za čakanje. Podčrtane so vrednosti opcije v posameznih vozliščih.

$t = 3$: (uuu) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_{uuu} > 50\}} = 2 \cdot 1 = \underline{2} \Rightarrow$ izvršimo

(uud) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_{uud} > 50\}} = 2 \cdot 1 = \underline{2} \Rightarrow$ izvršimo

(udd) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_{udd} > 50\}} = 2 \cdot 0 = \underline{0}$

(ddd) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_{ddd} > 50\}} = 2 \cdot 0 = \underline{0}$

$t = 2$: (uu) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_{uu} > 50\}} = 2 \cdot 1 = \underline{2}$

čakanje: $\frac{2}{1.04} = 1.9231 \Rightarrow$ izvršimo

(ud) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_{ud} > 50\}} = 2 \cdot 1 = \underline{2}$

čakanje: $\frac{1}{1.04} \cdot 2 \cdot \frac{3}{5} = 1.1538 \Rightarrow$ izvršimo

(dd) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_{dd} > 50\}} = 2 \cdot 0 = 0$

čakanje: $\underline{0} \Rightarrow$ čakamo

$t = 1$: (u) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_u > 50\}} = 2 \cdot 1 = \underline{2}$

čakanje: $\frac{2}{1.04} = 1.9231 \Rightarrow$ izvršimo

(d) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_d > 50\}} = 2 \cdot 0 = 0$

čakanje: $\frac{1}{1.04} \cdot 2 \cdot \frac{3}{5} = \underline{1.1538} \Rightarrow$ čakamo

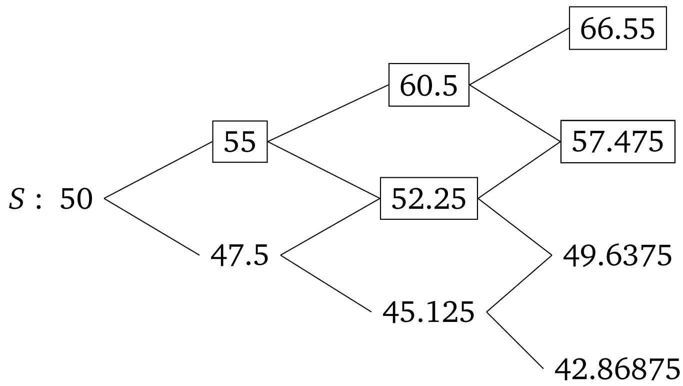
$t = 0$: (Ω) izvršitev: $2 \cdot 1_{\{S_0 > 50\}} = 2 \cdot 0 = 0$

čakanje: $\frac{1}{1.04}(2 \cdot \frac{3}{5} + 1.1538 \cdot \frac{2}{5}) = \underline{1.5976} \Rightarrow$ čakamo

Začetna cena ameriške digitalne opcije mora biti 1.5976.

(c) **[4 točke]**

Če na binomskem drevesu pogledamo stanja, v katerih se opcijo res splača izvršiti (torej ne primerjamo dveh ničelnih zneskov), dobimo naslednjo optimalno strategijo: *opcijo izvrši takoj, ko cena delnice preseže 50*.



Če je cena delnice pod 50, opcija ne ponuja izplačil in se je ne splača izvršiti.

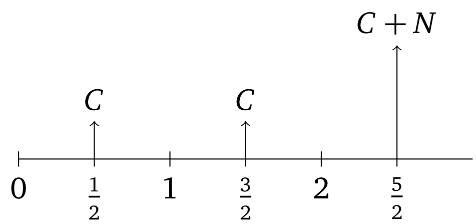
Če je cena nad 50, opcija ponuja izplačilo 2. Tega izplačila nikoli ne preseže, zato ga vzamemo ob prvem trenutku, ko je to možno (sedanja vrednost enakih zneskov pada z oddaljevanjem trenutka izplačila!).

2. naloga

(a) **[3 točke]**

Podatki: $N = 100$ EUR, $T = 2.5$ let, znesek posameznega kupona $C = 0.05 \cdot N = 5$ EUR.

Ceno obveznice določimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.



$$P = C \cdot D(0, \tfrac{1}{2}) + C \cdot D(0, \tfrac{3}{2}) + (C + N) \cdot D(0, \tfrac{5}{2}) =$$
$$= 5 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot 0.005} + 5 \cdot e^{-\frac{3}{2} \cdot 0.019} + 105 \cdot e^{-\frac{5}{2} \cdot 0.031} =$$
$$= 107.017 \text{ EUR}$$

(b) **[4 točke]**

Izročitveno ceno izračunamo po formuli $K = \left[P - I(0, \frac{3}{2})\right] \cdot A(0, \frac{3}{2})$, pri čemer je $I(0, \frac{3}{2})$ sedanja vrednost izplačil osnovnega instrumenta (kuponov obveznice) v času življenja terminskega posla in $A(0, \frac{3}{2})$ obrestni faktor za ustrezno časovno obdobje.

Računamo $I(0, \frac{3}{2}) = C \cdot D(0, \frac{1}{2}) + C \cdot D(0, \frac{3}{2}) = 9.84703$ EUR

in dobimo $K = [107.017 - 9.84703] \cdot e^{\frac{3}{2} \cdot 0.019} = 99.979$ EUR.

(c) **[5 točk]**

V trenutku $\frac{1}{2}$ cena obveznice znaša $P' = C \cdot D(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) + (C+N) \cdot D(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) = 104.413$ EUR.

Sedanja vrednost izplačil obveznice pred ročnostjo posla znaša

$I(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = C \cdot D(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 4.93295$ EUR.

Če bi posle sklenili v trenutku $\frac{1}{2}$, bi v njem zapisali izročitveno ceno

$K' = \left[P' - I(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})\right] \cdot A(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 100.8321$ EUR,

ki je višja od K. Vrednost starega posla za imetnika dolge pozicije je zato pozitivna in znaša

$V_{\frac{1}{2}} = (K' - K)D(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 0.8417$ EUR.

(d) **[3 točke]**

Za imetnika kratke pozicije bo vrednost posla ob ročnosti pozitivna, če bo takrat cena obveznice na trgu *nižja* od dogovorjenih $K = 99.979$ EUR.

Veljati mora $(C+N)D(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) < K$.

Upoštevamo $D(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) = e^{-Y(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})}$ in dobimo $Y(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) > -\log \frac{K}{C+N} = 0.049$.

Moč obresti $Y(1.5, 2.5)$ mora biti višja od 4.9%.

3. naloga

(a) **[4 točke]**

Za parametre modela $u = 1.25$, $d = u^{-1} = 0.8$ in $R = 10\%$ velja $d < 1 + R < u$, zato je trg brez arbitraže.

Za izračun do tveganja nevtralne verjetnosti (tudi do prihodnosti nevtralne verjetnosti) izberemo bančni račun za numerar in računamo $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{2}{3}$ in $1 - q = \frac{1}{3}$.

(b) **[4 točke]**

Vpeljimo standardne oznake iz enoobdobnega modela. Podana sta vektor cen $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 100 \end{bmatrix}$ in matrika izplačil $M = \begin{bmatrix} 1.1 & 125 \\ 1.1 & 80 \end{bmatrix}$. Vrednotiti želimo pogojno terjatev $X = \begin{bmatrix} 27 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Diskontiramo ($\widetilde{X} = \frac{1}{1.1}X$) in uporabimo verjetnost Q:

$c_X = \mathrm{E}_Q(\tilde{X}) = \frac{27}{1.1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{180}{11} = 16.36$.

(c) **[5 točk]**

Cena na trgu je prenizka. Arbitražo skonstuiramo tako, da opcijo kupimo na trgu (plačamo $\frac{160}{11}$) ter hkrati na istem trgu prodamo njen izvedbeni portfelj (zaslužimo $\frac{180}{11}$). Opisana strategijo ponuja izplačilo $\frac{20}{11}$ v trenutku 0 in ničelna izplačila v času 1 in je arbitražna.

Izračunamo še izvedbeni portfelj $\phi = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.

Veljati mora $M\phi = X$, kar je linearni sistem enačb za α in β

$$\begin{aligned} 1.1\alpha + 125\beta &= 27 \\ 1.1\alpha + 80\beta &= 0 \end{aligned}.$$

Rešitev je $\phi = \begin{bmatrix} -\frac{480}{11} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

Arbitražna strategija sestoji iz nakupa 1 opcije, prodaje $\frac{3}{5}$ delnice in pologa $\frac{480}{11}$ enot na bančni račun.

(d) **[7 točk]**

Znana podatka modela sta $R = 10\%$ ter $d' = \frac{1}{u'}$. Od tod izračunamo $q' = \frac{1+R-d'}{u'-d'} = \frac{1.1-\frac{1}{u'}}{u'-\frac{1}{u'}}$.

Da bo trg brez arbitraže, mora veljati $u' > 1 + R = 1.1$.

Možni ceni delnice v trenutku 1 znašata

$$S:\ 100 \begin{cases} 100u' > 110 \\ \frac{100}{u'} < 90.91 \end{cases}$$

zato vemo, da se opcijo z izvršilno ceno 98 splača izvršiti le v zgornjem stanju.

Z novim modelom določena cena opcije z izplačili $X' = \begin{bmatrix} 100u' - 98 \\ 0 \end{bmatrix}$ tako znaša

$c'_X = \frac{1}{1.1} \mathrm{E}_{Q'}(X') = \frac{1}{1.1}(100u' - 98) \cdot \frac{1.1-\frac{1}{u'}}{u'-\frac{1}{u'}}$, kar mora biti enako $\frac{160}{11}$.

Rešujemo enačbo

$$\frac{1}{1.1} \cdot (100u' - 98) \cdot \frac{1.1-\frac{1}{u'}}{u'-\frac{1}{u'}} = \frac{160}{11}.$$

Najprej jo pomnožimo z izrazom $\frac{11}{10}\big(u' - \frac{1}{u'}\big) > 0$,

$$(100u' - 98)\big(\tfrac{11}{10} - \tfrac{1}{u'}\big) = 16\big(u' - \tfrac{1}{u'}\big),$$

in nato še z $u' > 0$:

$$(100u' - 98)\big(\tfrac{11}{10}u' - 1\big) = 16(u'^2 - 1).$$

Še uredimo člene in dobimo kvadratno enačbo za u'

$$94u'^2 - \tfrac{1039}{5}u' + 114 = 0$$

z rešitvama $u'_1 = \frac{6}{5}$ in $u'_2 = \frac{95}{94} < 1.1$. Smiselna rešitev je u'_1, saj u'_2 omogoča arbitražo.

Pravilno umerjen model ima torej parametre $u' = \frac{6}{5}$, $d' = \frac{5}{6}$ in od tod še $q' = \frac{8}{11}$.