



FINANČNA MATEMATIKA 1

Pisni izpit

22. avgust 2012

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 3, rešiti morate vse. Skupaj lahko zberete 50 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, na katerem so naloge.

Izpit morate obvezno oddati.

Pazite na zadostno natančnost pri računanju. Vse odgovore utemeljite.

Na voljo imate 110 minut. Veliko uspeha!

Rezultati bodo objavljeni do petka, 24. avgusta 2012, v spletni učilnici predmeta.

Naloga	a	b	c	d	Skupaj
1.					
2.				•	
3.					
Skupaj	•	•	•	•	

1. naloga [15 točk]

Naj bo $0 < T < U$ in naj 0 označuje današnji dan. $Y(0, T)$ je trenutna moč obresti za dospelje T , $D(0, T)$ pa trenutni diskontni faktor za isto obdobje.

- (a) Izpeljite terminsko moč obresti $Y(0, T, U)$ in jo izrazite s trenutnimi diskontnimi faktorji.
- (b) Intenzivnost terminske obrestne mere f je definirana s predpisom $f(T) = \lim_{U \searrow T} Y(0, T, U)$. Naj bo diskontna funkcija $T \mapsto D(0, T)$ zvezno odvedljiva. Pokažite, da je

$$f(T) = -\frac{d}{dT} \ln D(0, T). \quad (1)$$

Pri opisovanju obrestnih mer včasih najprej podamo časovno strukturo intenzivnosti terminske obrestne mere $T \mapsto f(T)$ in nato druge količine izpeljemo iz nje z obratom formule (1),

$$D(0, T) = e^{-\int_0^T f(t) dt}.$$

Naj funkcija f določa časovno strukturo intenzivnosti terminske obrestne.

- (c) Izrazite trenutno moč obresti $Y(0, T)$ in terminsko moč obresti $Y(0, T, U)$ s pomočjo funkcije f in interpretirajte rezultata.
- (d) Naj bo funkcija f naraščajoča. Dokažite, da je tedaj tudi časovna struktura moči obresti naraščajoča.

Nasvet: Izračunajte odvod.

2. naloga [15 točk]

Finančni trg sestavljajo netvegani bančni račun z obdobjno obrestno mero 20% ter delnici S in W z trenutnima cenama $S_0 = 10$ in $W_0 = 20$. Do časa 1 lahko vrednost delnice S naraste za 50% ali pade za 10%, vrednost delnice W pa lahko naraste za 40% ali pade za 20%. Donosa delnic sta pri tem neodvisna.

- (a) Izpišite podatke finančnega trga in izračunajte do tveganja nevtralno verjetnost.

Nasvet: Pri bančnem računu vzemite $B_0 = 10$.

- (b) Določite premijo evropske nakupne opcije z zapadlostjo 1 in izvršilno ceno 12, napisano na delnico S . Če je opcija na trgu (B, S, W) dosegljiva, določite še njen izvedbeni portfelj.

- (c) Dokažite, da je evropska nakupna opcija na delnico S z zapadlostjo 1 dosegljiva pri poljubni izvršilni ceni K .

3. naloga [20 točk]

Delniška družba danes ($t_0 = 0$) potrebuje svež kapital. Na kapitalskem trgu ga namerava pridobiti z izdajo *zamenljive obveznice (convertible bond)*. To je *hibridni instrument*¹, ki ob kuponskih datumih t_1, \dots, t_n izplačuje kupone v višini C , ob dospelju $T = t_n$ pa še znesek X , odvisen od nominalne vrednosti obveznice N in takratne cene izdajateljeve delnice S_T .

Če bo cena delnice S_T nižja od ob izdaji določene *cene zamenjave (conversion price)* K , bo znesek X enak nominalni vrednosti N . V nasprotnem primeru bo višina izplačila X enaka vrednosti $x \cdot S_T$, kjer je število x *razmerje zamenjave (conversion ratio)*. Slednji znesek lahko obvezničar prejme v gotovini ali pa v obliki na novo izdanih delnic družbe.

- (a) Določite razmerje zamenjave x tako, da bo izplačilo X zvezna funkcija cene delnice S_T . Narišite graf funkcije $X(S_T)$.
- (b) Dokažite, da lahko izplačilo X predstavimo kot izplačilo portfelja brezkuponskih obveznic in evropskih opcij, napisanih na delnico delniške družbe.

Naj bo $N = 100$ EUR, letni kuponi $C = 3$ EUR, dospelje obveznice čez $T = t_2 = 2$ leti. Cena delnice danes znaša $S_0 = 18$ EUR, cena zamenjave pa je $K = 20$ EUR. Prihodnji razvoj dogodkov lahko opišemo z binomskim modelom z letnimi obdobji in parametri $u = 1.1$, $d = 0.95$ in $R = 3\%$. Privzemimo še, da morebitna izdaja novih delnic na njihovo ceno ne bo vplivala.

- (c) Narišite drevo dogodkov in določite ceno zamenljive obveznice ob izdaji.
- (d) Kolikšen kupon bi morala imeti klasična kuponska obveznica z enako nominalno vrednostjo in datumi izplačil, da bi bila njena cena danes enaka ceni zamenljive obveznice?

¹Hibridni instrumenti so kombinacija dolžniških in lastniških vrednostnih papirjev