1. naloga [15 točk]

Naj bo $0 < T < U$ in naj 0 označuje današnji dan. $Y(0,T)$ je trenutna moč obresti za dospetje T, $D(0,T)$ pa trenutni diskontni faktor za isto obdobje.

4 (a) Izpeljite terminsko moč obresti $Y(0,T,U)$ in jo izrazite s trenutnimi diskontnimi faktorji.

3 (b) Intenzivnost terminske obrestne mere f je definirana s predpisom $f(T) = \lim_{U \searrow T} Y(0,T,U)$. Naj bo diskontna funkcija $T \mapsto D(0,T)$ zvezno odvedljiva. Pokažite, da je

$$f(T) = -\frac{d}{dT} \ln D(0,T). \tag{1}$$

Pri opisovanju obrestnih mer včasih najprej podamo časovno strukturo intenzivnosti terminske obrestne mere $T \mapsto f(T)$ in nato druge količine izpeljemo iz nje z obratom formule (1),

$$D(0,T) = e^{-\int_0^T f(t)dt}.$$

Naj funkcija f določa časovno strukturo intenzivnosti terminske obrestne.

4 (c) Izrazite trenutno moč obresti $Y(0,T)$ in terminsko moč obresti $Y(0,T,U)$ s pomočjo funkcije f in interpretirajte rezultata.

4 (d) Naj bo funkcija f naraščajoča. Dokažite, da je tedaj tudi časovna struktura moči obresti naraščajoča.

Nasvet: Izračunajte odvod.

(a) Primerjamo prekinjeno in neprekinjeno investicijo 1 EUR do časa u

$$A(0,T) \cdot A(0,T,u) = A(0,u)$$

$$\Rightarrow e^{T \cdot Y(0,T)} \cdot e^{(u-T) Y(0,T,u)} = e^{u \cdot Y(0,u)}$$

$$\Rightarrow T \cdot Y(0,T) + (u-T) Y(0,u) = u \cdot Y(0,u)$$

$$\Rightarrow (u-T) Y(0,T,u) = u \cdot Y(0,u) - T \cdot Y(0,T)$$

$$\Rightarrow \underline{Y(0,T,u) = \frac{1}{u-T} \left(u \cdot Y(0,u) - T \cdot Y(0,T) \right)} \quad 2$$

$$D(0,T) = e^{-T \cdot Y(0,T)}$$

$$\ln D(0,T) = -T \cdot Y(0,T)$$

$$\left.\begin{aligned} T \cdot Y(0,T) &= -\ln D(0,T) \\ u \cdot Y(0,u) &= -\ln D(0,u) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{Y(0,T,u) = \frac{1}{u-T} \left(-\ln D(0,u) + \ln D(0,T) \right)} \quad 2$$

ⓑ $\lim_{u \searrow T} Y(0,T,u) = \lim_{u \searrow T} \frac{1}{u-T}\left(-\ln D(0,u) + \ln D(0,T)\right) =$

$$= -\lim_{u \searrow T} \frac{\ln D(0,u) - \ln D(0,T)}{u-T} \qquad u = T+h$$

$$= -\lim_{h \searrow 0} \frac{\ln D(0,T+h) - \ln D(0,T)}{h} =$$

$D(0,T)$ zvezno odvedljiva $\Downarrow$ $\ln D(0,T)$ zvezno odvedljiva $\Downarrow$ levi odvod = = desni odvod

$$= -\frac{d}{dT} \ln D(0,T)$$ 3

ⓒ $D(0,T) = e^{-\int_0^T f(u)du} = e^{-T \cdot Y(0,T)}$

$$-T \cdot Y(0,T) = -\int_0^T f(u)du$$

$$Y(0,T) = \underline{\underline{\frac{1}{T}\int_0^T f(u)du}} = \text{povprečna vrednost } f \text{ na } [0,T]$$ 2

$$Y(0,T,u) = \frac{1}{u-T}\left(u \cdot Y(0,u) - T \cdot Y(0,T)\right) =$$

$$= \frac{1}{u-T} \cdot \left(u \cdot \frac{1}{u} \cdot \int_0^u f(u)du - T \cdot \frac{1}{T}\int_0^T f(u)du\right) =$$

$$= \frac{1}{u-T}\left(\int_0^u f(u)du - \int_0^T f(u)du\right) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{u-T}\int_T^u f(u)du}} = \text{porprečna vrednost } f \text{ na } [T,u]$$ 2

ⓓ f naraščajoča

$$\frac{d}{dT} Y(0,T) = \frac{d}{dT}\left(\frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(u)du\right) = -\frac{1}{T^2}\int_0^T f(u)du + \frac{1}{T} f(T) =$$

$$= \underline{\frac{1}{T^2}\left(T \cdot f(T) - \int_0^T f(u)du\right)}$$ 2

ker f naraščajoča $\Rightarrow f(u) \leq f(T) \quad \forall u \in [0,T]$

$$\Rightarrow \int_0^T f(u)du \leq \int_0^T f(T)du = f(T) \cdot T$$

$$\Rightarrow T \cdot f(T) - \int_0^T f(u)du \geq 0$$

$\Rightarrow \frac{d}{dT} Y(0,T) \geq 0 \Rightarrow Y(0,T)$ naraščajoča funkcija T 2

2. naloga [15 točk]

Finančni trg sestavljajo netvegani bančni račun z obdobno obrestno mero 20% ter delnici S in W z trenutnima cenama $S_0 = 10$ in $W_0 = 20$. Do časa 1 lahko vrednost delnice S naraste za 50% ali pade za 10%, vrednost delnice W pa lahko naraste za 40% ali pade za 20%. Donosa delnic sta pri tem neodvisna.

5 (a) Izpišite podatke finančnega trga in izračunajte do tveganja nevtralno verjetnost.

Nasvet: Pri bančnem računu vzemite $B_0 = 10$.

5 (b) Določite premijo evropske nakupne opcije z zapadlostjo 1 in izvršilno ceno 12, napisano na delnico S. Če je opcija na trgu (B, S, W) dosegljiva, določite še njen izvedbeni portfelj.

5 (c) Dokažite, da je evropska nakupna opcija na delnico S z zapadlostjo 1 dosegljiva pri poljubni izvršilni ceni K.

(a) Podatki:

vektor cen $c = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} \begin{matrix} B \\ S \\ W \end{matrix}$ izplačila $M = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 28 \\ 12 & 15 & 16 \\ 12 & 9 & 28 \\ 12 & 9 & 16 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{obe gor} \\ S\uparrow, W\downarrow \\ S\downarrow, W\uparrow \\ \text{obe dol} \end{matrix}$

$\begin{matrix} B & S & W \end{matrix}$ 2

Numerar B:

$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 5/4 & 7/3 \\ 1 & 5/4 & 4/3 \\ 1 & 3/4 & 7/3 \\ 1 & 3/4 & 4/3 \end{bmatrix}$

$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$

$\frac{5}{4}q_1 + \frac{5}{4}q_2 + \frac{3}{4}q_3 + \frac{3}{4}q_4 = 1 \quad / \cdot 4$

$\frac{7}{3}q_1 + \frac{4}{3}q_2 + \frac{7}{3}q_3 + \frac{4}{3}q_4 = 2 \quad / \cdot 3$

1

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 7 & 4 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & +2 & +2 & +1 \\ 0 & +3 & 0 & +3 & +1 \end{array}\right]$$

q_4 parameter:

$3q_2 + 3q_4 = 1$ $\quad$ $2q_3 + 2q_4 = 1$ $\quad$ $q_1 = 1 - (\frac{1}{3} - q_4) - (\frac{1}{2} - q_4) - q_4 =$

$q_2 = \frac{1}{3} - q_4$ $\quad$ $q_3 = \frac{1}{2} - q_4$ $\quad$ $= \frac{1}{6} + q_4$

Pozitivnost:

$$\left.\begin{array}{l} q_4 > 0 \\ q_1 > 0 \ \checkmark \\ q_2 > 0 \Rightarrow q_4 < \frac{1}{3} \\ q_3 > 0 \Rightarrow q_4 < \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < q_4 < \frac{1}{3}$$

2

ⓑ $X = \max\{S_1 - K, 0\} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 1 $\Rightarrow \tilde{X} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$K = 12$

$$\frac{G_0^E}{10} = E_Q(\tilde{X}) = \frac{1}{4}(q_1 + q_2) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{6} + q_4 + \frac{1}{3} - q_4\right) = \frac{1}{8}$$

$\Rightarrow G_0^E = \frac{10}{8} = \underline{\underline{\frac{5}{4}}}$ $\Rightarrow$ neodvisno od q_4, zato dosegljiva 2

Izvedbeni portfelj $\theta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \begin{matrix} B \\ S \\ W \end{matrix}$: $M\theta = X$

$$\left.\begin{aligned} 12\alpha + 15\beta + 28\gamma &= 3 \\ 12\alpha + 15\beta + 16\gamma &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma = 0 \qquad \left.\begin{aligned} 12\alpha + 15\beta &= 3 \\ 12\alpha + 9\beta &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

$$12\alpha + 9\beta + 28\gamma = 0$$
$$12\alpha + 9\beta + 16\gamma = 0$$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{9}{12}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$ 2

ⓒ Dosegljivost

1) $K \geq 15 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow$ dosegljivost očitna 1

2) $9 < K < 15 \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 15-K \\ 15-K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$G_0^E = \frac{10}{12}\cdot\left[(15-K)\cdot\left(\frac{1}{6} + q_4\right) + (15-K)\left(\frac{1}{3} - q_4\right)\right] =$$

$= \frac{10}{12}\cdot(15-K)\cdot\frac{1}{2}$ neodvisno od q_4 $\Rightarrow$ dosegljiva 2

3) $K \leq 9 \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 15-K \\ 15-K \\ 9-K \\ 9-K \end{bmatrix}$

$$G_0^E = \frac{10}{12}\cdot\left[(15-K)\left(\frac{1}{6} + q_4 + \frac{1}{3} - q_4\right) + (9-K)\left(\frac{1}{2} - q_4 + q_4\right)\right] =$$

$= \frac{10}{12}\cdot\left[(15-K)\cdot\frac{1}{2} + (9-K)\cdot\frac{1}{2}\right]$ neodvisno od q_4

$\Rightarrow$ dosegljiva 2

Dosegljivost lahko dokažemo tudi tako, da se omejimo na podtrg (B, S), ki je binomski.

3. naloga [20 točk]

Delniška družba danes ($t_0 = 0$) potrebuje svež kapital. Na kapitalskem trgu ga namerava pridobiti z izdajo *zamenljive obveznice* (*convertible bond*). To je *hibridni instrument*[1], ki ob kuponskih datumih $t_1, \ldots, t_n$ izplačuje kupone v višini C, ob dospetju $T = t_n$ pa še znesek X, odvisen od nominalne vrednosti obveznice N in takratne cene izdajateljeve delnice S_T.

Če bo cena delnice S_T nižja od ob izdaji določene *cene zamenjave* (*conversion price*) K, bo znesek X enak nominalni vrednosti N. V nasprotnem primeru bo višina izplačila X enaka vrednosti $x \cdot S_T$, kjer je število x *razmerje zamenjave* (*conversion ratio*). Slednji znesek lahko obvezničar prejme v gotovini ali pa v obliki na novo izdanih delnic družbe.

2 (a) Določite razmerje zamenjave x tako, da bo izplačilo X zvezna funkcija cene delnice S_T. Narišite graf funkcije $X(S_T)$.

5 (b) Dokažite, da lahko izplačilo X predstavimo kot izplačilo portfelja brezkuponskih obveznic in evropskih opcij, napisanih na delnico delniške družbe.

Naj bo $N = 100$ EUR, letni kuponi $C = 3$ EUR, dospetje obveznice čez $T = t_2 = 2$ leti. Cena delnice danes znaša $S_0 = 18$ EUR, cena zamenjave pa je $K = 20$ EUR. Prihodnji razvoj dogodkov lahko opišemo z binomskim modelom z letnimi obdobji in parametri $u = 1.1$, $d = 0.95$ in $R = 3\%$. Privzemimo še, da morebitna izdaja novih delnic na njihovo ceno ne bo vplivala.

8 (c) Narišite drevo dogodkov in določite ceno zamenljive obveznice ob izdaji.

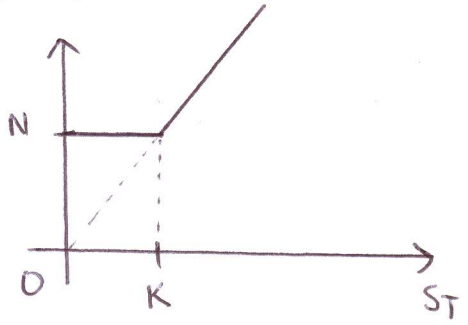
5 (d) Kolikšen kupon bi morala imeti klasična ~~brez~~kuponska obveznica z enako nominalno vrednostjo in datumi izplačil, da bi bila njena cena danes enaka ceni zamenljive obveznice?

(a) Izplačilo $X = \begin{cases} N; & S_T < K \\ x \cdot S_T; & S_T \geq K \end{cases}$

Za zveznost morata predpisa pri $S_T = K$ dati enako vrednost:

$\left.\begin{array}{l} L: N \\ D: x \cdot K \end{array}\right\} N = x \cdot K \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{N}{K}}}$ 1

Graf:



1

(b) Izplačilo X je ekvivalentno izplačilu brezkuponske obveznice z nominalno vrednostjo N in dospetjem T ter $\frac{N}{K}$ evropskih nakupnih opcij na delnico z zapadlostjo T in izvršilno ceno K 3

[1] Hibridni instrumenti so kombinacija dolžniških in lastniških vrednostnih papirjev

$$X = N + \frac{N}{K}\max\{S_T - K, 0\} = N + \max\left\{\frac{N}{K}S_T - N, 0\right\} =$$

$$= \max\left\{\underbrace{\frac{N}{K}S_T}_{X}, N\right\} = \begin{cases} x \cdot S_T; & S_T \le K \\ N; & S_T > K \end{cases}$$ 2

ⓒ Binomski model 2 (drevo)

$$B: \quad 1 \longrightarrow 1{,}03 \longrightarrow 1{,}03^2$$

$$S: \quad 18 \begin{cases} \nearrow \; \overset{3}{19{,}8} \begin{cases} \nearrow \; 21{,}78 \quad 3 + 5 \cdot 21{,}78 = 111{,}9 \\ \searrow \; 18{,}81 \quad 3 + 100 = 103 \end{cases} \\ \searrow \; \overset{3}{17{,}1} \begin{cases} \nearrow \; 18{,}81 \quad 3 + 100 = 103 \\ \searrow \; 16{,}245 \quad 3 + 100 = 103 \end{cases} \end{cases}$$

$$q = \frac{1 + R - d}{u - d} = \frac{1{,}03 - 0{,}95}{1{,}1 - 0{,}95} = \frac{8}{15}$$ 2

$$1 - q = \frac{7}{15}$$

Pri danih podatkih je $x = \frac{100}{20} = 5$

in $X = \begin{cases} 5 \cdot S_T; & S_T \geq 20 \\ 100; & S_T < 20 \end{cases}$ 2

Izplačila zamenljive obveznice so ob drevesu

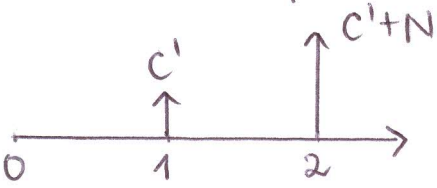
(pozor: kuponi ob $t = 1, 2$)

Cena obveznice

$$p_0^{ConB} = \frac{3}{1{,}03} + \frac{3}{1{,}03^2} + \frac{1}{1{,}03^2}\left(108{,}9 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^2 + 100 \cdot 2 \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{15} + 100 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^2\right) =$$

$$= \underline{\underline{102{,}386 \text{ EUR}}}$$ 2

ⓓ Klasična kuponska obveznica:



$$D(0,1) = \frac{1}{1{,}03}$$

$$D(0,2) = \frac{1}{1{,}03^2}$$ 1

Formula za vrednotenje

$$P_0^{ConB} = c' \cdot D(0,1) + (c' + N) \cdot D(0,2) \quad 2$$

$$= c'\left(D(0,1) + D(0,2)\right) + N \cdot D(0,2)$$

$$\Rightarrow c' = \frac{P_0^{ConB} - N \cdot D(0,2)}{D(0,1) + D(0,2)} = \frac{102{,}386 - \frac{100}{1{,}03^2}}{\frac{1}{1{,}03} + \frac{1}{1{,}03^2}} = \underline{\underline{4{,}25 \text{ EUR}}} \quad 2$$

Zamenljive obveznice ponujajo nižje kuponske donose ($c < c'$) od klasičnih kuponskih obveznic, saj omogočajo višje donose ob dospetju (če gre izdajatelju dobro in je njegova delnica veliko vredna)