Pisni izpit: 4. julij 2011

1. naloga

(a) **[8 točk]**

Opisani model ima 2 možni stanji v času 1 in dva vrednostna papirja, ki ju predstavimo z vektorjem cen $c = \begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix}$ in matriko izplačil $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \delta \end{bmatrix}$.

Izberemo netvegano obveznico B^1 za numerar in izračunamo vektor diskontiranih cen $\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{F}{D} \end{bmatrix}$ ter matriko diskontiranih izplačil $\widetilde{M} = M$.

Za do tveganja nevtralni verjetnosti $q_1 = Q(\text{solventnost})$ in $q_2 = Q(\text{bankrot})$ mora veljati

$E_Q(\tilde{B}_1^1) = \tilde{B}_0^1 \quad \Longrightarrow \quad q_1 + q_2 = 1$

$E_Q(\tilde{B}_1^2) = \tilde{B}_0^2 \quad \Longrightarrow \quad q_1 + \delta q_2 = \frac{F}{D}$.

Ker je $\delta < 1$, je sistem enolično rešljiv in ima rešitvi $q_1 = \frac{\frac{F}{D} - \delta}{1-\delta}$ in $q_2 = \frac{1-\frac{F}{D}}{1-\delta}$.

Po 1. izreku finančne matematike je trg brez arbitraže natanko tedaj, ko na trgu obstaja do tveganja nevtračna verjetnost, torej ko sta q_1 in q_2 oba hkrati pozitivna.

Upoštevamo, da je imenovalec $1 - \delta > 0$ in določimo pogoje

$q_1 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{F}{D} - \delta > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{F}{D} > \delta,$

$q_2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \frac{F}{D} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 > \frac{F}{D}.$

Rezultata združimo v potreben in zadosten pogoj $\delta < \frac{F}{D} < 1$.

(b) **[2 točki]**

To je $q_2 = \frac{1-\frac{F}{D}}{1-\delta}$

(c) **[5 točk]**

Naj bo p naravna verjetnost bankrota. Donos prve obveznice glede na naravno verjetnost je (neprava) slučajna spremenljivka r_{B^1} z verjetnostno funkcijo

$r_{B^1} \overset{P}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{1-D}{D} & \frac{1-D}{D} \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

Pričakovani donos zato znaša $E_P(r_{B^1}) = \frac{1-D}{D}$.

Donos druge obveznice je (prava) slučajna spremenljivka r_{B^2} z verjetnostno funkcijo

$r_{B^2} \overset{P}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{1-F}{F} & \frac{\delta-F}{F} \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

Pričakovani donos zato znaša $E_P(r_{B^2}) = \frac{1-F}{F}(1-p) + \frac{\delta-F}{F}p$.

Potrebne in zadostne pogoje za p, pod katerimi je $E_P(r_{B^2}) > E_P(r_{B^1})$ dobimo z reševanjem neenačbe $\frac{1-F}{F}(1-p) + \frac{\delta-F}{F}p > \frac{1-D}{D}$.

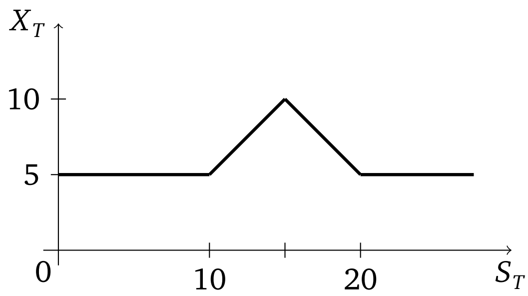
Pazimo, da je $0 \leq \delta < 1$ in dobimo rešitev $p < \frac{1-\frac{F}{D}}{1-\delta} = q_2$.

Rezultat je pričakovan. Pri $p = q_2$ je naravna verjetnost P enaka do tveganja nevtralni verjetnosti Q, zato je pričakovan donos tvegane obveznice B^2 enak pričakovanemu donosu netvegane B^1. Naravni pričakovani donos tvegane obveznice bo višji od netveganega donosa, če bo naravna verjetnost bankrota izdajatelja nižja od netvegane verjetnosti tega izida.

2. naloga

(a) **[3 točke]**

Narišemo graf fukcije $X_T(S_T)$.

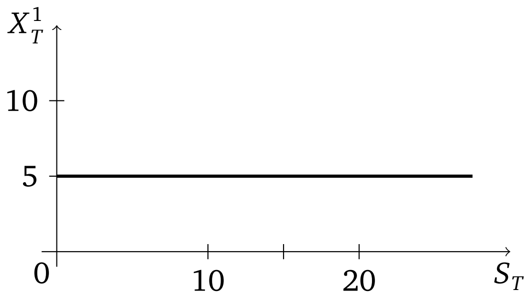


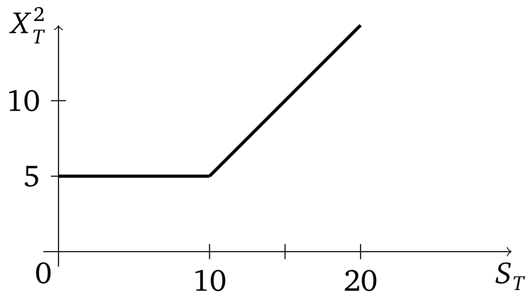
Gre za zvezno odsekoma linearno funkcijo. Če izplačilom odštejemo znesek 5, to je $X_T - 5$, dobimo opcijsko strategijo metuljev korak.

(b) **[4 točke]**

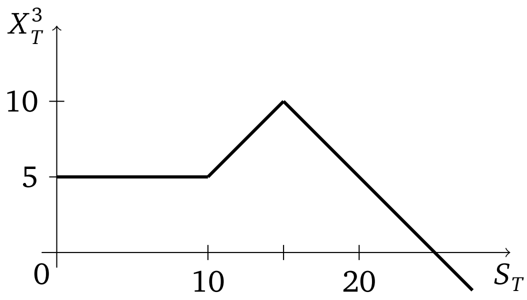
Izplačilo sestavimo po korakih. Vsi spodnji grafi prikazujejo izplačila ob zapadlosti T.

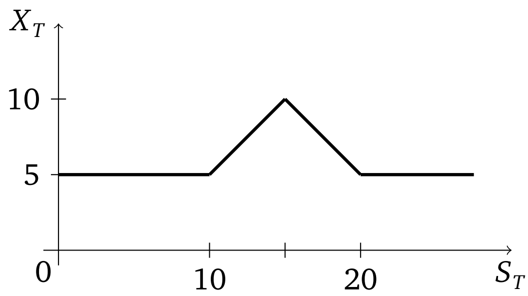
- Na banki investiramo $5D(0,T) = 5e^{-\frac{1}{4}\cdot 0.08} = 4.90$ EUR.
- Kupimo evropsko nakupno opcijo z izvršilno ceno 10 in zapadostjo T.





- Prodamo dve evropski nakupni opciji z izvršilno ceno 15 in zapadostjo T.
- Kupimo evropsko nakupno opcijo z izvršilno ceno 20 in zapadostjo T.





Rezultat analitično preverimo s poenostavitvijo spodnjega izraza na disjunktnih intervalih.

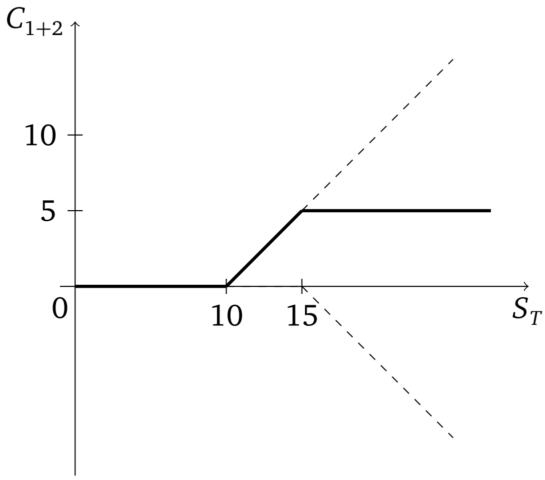
$X_T = 5 + \max\{S_T - 10, 0\} - 2\max\{S_T - 15, 0\} + \max\{S_T - 20, 0\}$.

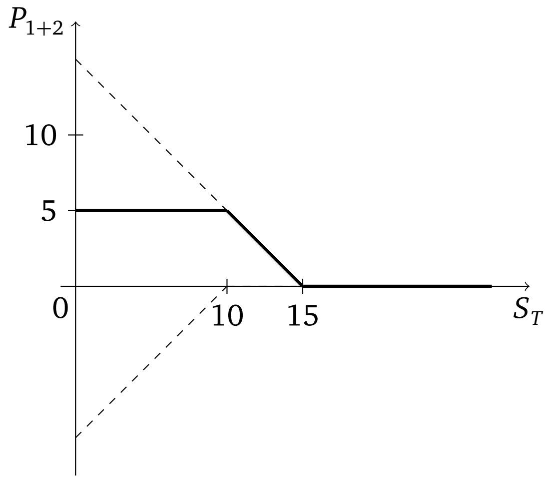
(c) **[4 točke]**

Depozit na banki, ki izplača 5 ob zapadlosti, izrazimo z izplačili opcij. Portfelju opcij iz naloge (b) zato dodamo še naslednje opcije:

- Kupimo evropsko nakupno opcijo z izvršilno ceno 10 in zapadostjo T.

– Prodamo evropsko nakupno opcijo z izvršilno ceno 15 in zapadostjo T.
– Kupimo evropsko prodajno opcijo z izvršilno ceno 15 in zapadostjo T.
– Prodamo evropsko prodajno opcijo z izvršilno ceno 10 in zapadostjo T.





Izplačila naštetega portfelja se seštejejo v konstantno izplačilo 5.

(d) **[4 točke]**

Uporabimo portfelj iz naloge (b) in Black-Scholesovo formulo

$c_0^{\mathrm{E}} = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-YT}\Phi(d_2)$, kjer je $d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{K}+YT+\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$ in $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{\ln\frac{S_0}{K}+YT-\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$.

Pri $K = 10$ dobimo $c_0^{\mathrm{E}_1} = 12\Phi\left(\frac{\ln\frac{12}{10}+0.02+0.02}{0.2}\right) - 10e^{-0.02}\Phi\left(\frac{\ln\frac{12}{10}+0.02-0.02}{0.2}\right)$.

Poračunamo in dobimo $12\Phi(1.1116) - 10e^{-0.02}\Phi(0.9116) = 2.3742$ EUR.

Pri $K = 15$ dobimo $c_0^{\mathrm{E}_2} = 12\Phi(-0.9157) - 15e^{-0.02}\Phi(-1.1157) = 0.2141$ EUR,

pri $K = 20$ pa dobimo $c_0^{\mathrm{E}_3} = 12\Phi(-2.3541) - 20e^{-0.02}\Phi(-2.5541) = 0.0071$ EUR.

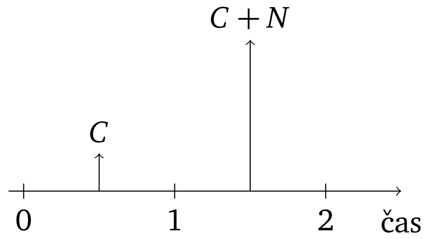
Upoštevamo zgradbo portfelja iz (b) in dobimo

$\pi_0(X) = 4.90 + c_0^{\mathrm{E}_1} - 2c_0^{\mathrm{E}_2} + c_0^{\mathrm{E}_3} = 6.854$ EUR.

3. naloga

(a) **[5 točk]**

Narišemo prihodnje denarne tokove obveznice (glede na danes).



Upoštevamo $N = 1000$ EUR, $C = cN = 0.03 \cdot 1000 = 30$ EUR in $P_0^{\text{CB}} = 1025$ EUR ter uporabimo formulo za vrednotenje obveznic. Dobimo enačbo

$P_0^{\text{CB}} = CD(0, \frac{1}{2}) + (N+C)D(0, \frac{3}{2})$.

Upoštevamo $D(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\cdot 0.018}$ in izračunamo $D(0, \frac{3}{2}) = \dfrac{1025 - \frac{30}{1+\frac{1}{2}\cdot 0.018}}{1030} = 0.9663$,

od koder dobimo $L(0, \frac{3}{2}) = \frac{2}{3}(\frac{1}{D(0,\frac{3}{2})} - 1) = 2.33\%$.

(b) **[4 točke]**

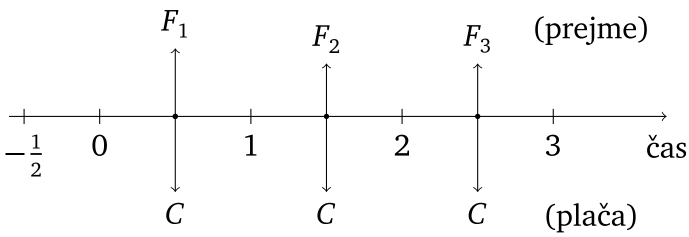
Uporabimo formulo za izračun terminske obrestne mere pri navadnem obrestovanju

$L(0,1,2) = \frac{1}{2-1}\left(\frac{1+2L(0,2)}{1+1L(0,1)} - 1\right)$, od koder izrazimo

$L(0,2) = \frac{L(0,1)+L(0,1,2)+L(0,1)L(0,1,2)}{2} = 2.79\%$.

(c) **[6 točk]**

Narišemo shemo prihodnjih denarnih tokov za imetnika dolga pozicije. Njihova sedanja vrednost mora biti $V_0^{\text{SWAP}} = -860.00$ EUR.



Denarnima tokovoma v trenutku $\frac{5}{2}$ dodamo znesek N in uporabimo vrednotenje zamenjave kot portfelja obveznic. $V_0^{\text{SWAP}} = P_0^{\text{FL}} - P_0^{\text{CB}}$.

Izračunamo naslednji spremenljivi kupon $F_1 = NL(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 100000 \cdot 0.015 = 1500$ EUR in izračunamo sedanjo vrednost spremenljivih denarnih tokov

$P_0^{\text{FL}} = (N + F_1)D(0, \frac{1}{2}) = \frac{101500}{1+\frac{1}{2}\cdot 0.018} = 100594.65$ EUR.

Fiksni kuponi znašajo $C = NL_{\text{SWAP}} = 100000 \cdot 0.03 = 3000$ EUR. Z diskontiranjem izračunamo še sedanjo vrednost fiksnih denarnih tokov

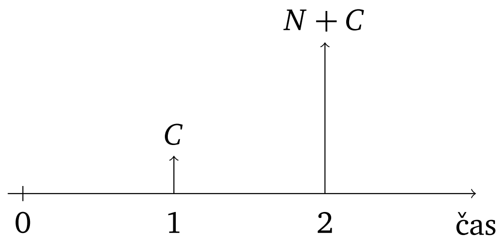
$P_0^{\text{CB}} = C(D(0,\frac{1}{2}) + D(0,\frac{3}{2})) + (C+N)D(0,\frac{5}{2})$, pri čemer diskontnega faktorja $D(0,\frac{5}{2})$ ne poznamo, vemo pa, da je $P_0^{\text{CB}} = P_0^{\text{FL}} - V_0^{\text{SWAP}}$, kar že poznamo.

Po enačenju dobimo $D(0,\frac{5}{2}) = \frac{P_0^{\text{FL}} - V_0^{\text{SWAP}} - CD(0,\frac{1}{2}) - CD(0,\frac{3}{2})}{C+N} = 0.9280$.

Od tod izračunamo $L(0,\frac{5}{2}) = 3.10\%$.

(d) **[5 točk]**

Banka B uporablja obrestne mere $\widetilde{L}(0,T) = L(0,T) + 1.2\%$ in diskontne faktorje $\widetilde{D}(0,T) = \frac{1}{1+T\widetilde{L}(0,T)}$. Narišemo denarne tokove obveznice in določimo višino kupona C tako, da bo cena obveznice enaka N.



Veljati mora $N = C(\widetilde{D}(0,1) + \widetilde{D}(0,2)) + N\widetilde{D}(0,2)$.

Od tod dobimo $C = \frac{N(1-\widetilde{D}(0,2))}{\widetilde{D}(0,1)+\widetilde{D}(0,2)} = 39.03$ EUR.