Pisni izpit: 24. junij 2010

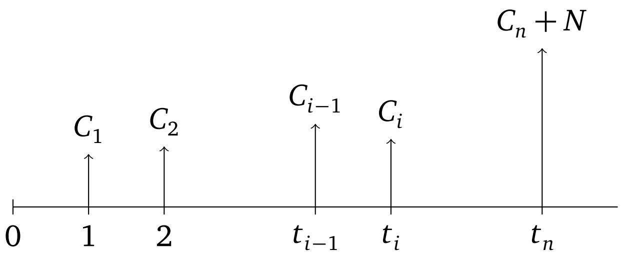
1. naloga

(a) **[3 točke]**

Terminsko obrestno mero izračunamo po formuli $L(0,1,2) = \frac{1}{2-1}\left(\frac{1+2L(0,2)}{1+L(0,1)} - 1\right) = 4\%$.

(b) **[4 točke]**

Denarni tokovi obratne obveznice z dospetjem n let:



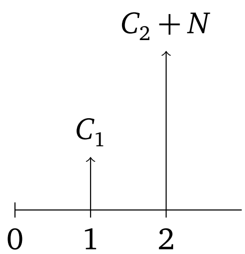
Prejeti kuponi znašajo $C_i = N(L_{\mathrm{IF}} - L(t_{i-1}, t_i)) = \underbrace{N \cdot L_{\mathrm{IF}}}_{\text{fiksno}} - \underbrace{N \cdot L(t_{i-1}, t_i)}_{\text{spremenljivo}}$.

Z znanimi finančnimi instrumenti jih lahko povežemo na več načinov.

Kupone C_i obratne obveznice lahko predstavimo kot netirane denarne tokove kratke strani v zamenjavi obrestnih mer. Pri tem je dogovorjena fiksna obrestna mera zamenjave L_{SWAP} enaka L_{IF}, navidezna glavnica zamenjave enaka nominalni vrednosti obveznice N in trenutki izplačil t_i.

Nominalno vrednost N, ki jo obratna obveznica izplača ob dospetju, predstavimo z dolgo pozicijo v brezkuponski obveznici z enako nominalno vrednostjo in dospetjem.

(c) **[5 točk]**



Instrument vrednostimo skladno z ekvivalenco iz naloge (b).

Za vrednotenje kuponov uporabimo formulo za vrednotenje kratke pozicije v zamenjavi $V^{\mathrm{SWAP}} = N\Delta\sum_{j=1}^{n}(L^{\mathrm{SWAP}} - L(0, j-1, j))D(0, j)$ ter podatke $\Delta = 1$, $N = 1000$, $n = 2$ in $L_{\mathrm{SWAP}} = L_{\mathrm{IF}} = 2\%$.

Dobimo $V^{\mathrm{SWAP}} = 1000\left[(L_{\mathrm{IF}} - L(0,0,1))D(0,1) + (L_{\mathrm{IF}} - L(0,1,2))D(0,2)\right]$.

Upoštevamo še $L(0,0,1) = L(0,1)$ in dobimo $V^{\mathrm{SWAP}} = -11.59$.

Za vrednotenje izplačila nominalne vrednosti uporabimo formulo za vrednotenje brezkuponske obveznice $V^{\mathrm{ZCB}} = ND(0, t_n)$.

Dobimo $V^{\mathrm{ZCB}} = 1000D(0,2) = 949.67$.

Vrednost obratne obveznice zato znaša $V^{\mathrm{IF}} = V^{\mathrm{SWAP}} + V^{\mathrm{ZCB}} = 938.08$.

(d) **[3 točke]**

Prvi kupon je izplačan v trenutku 1. Takrat že poznamo obrestno mero $L(1,2)$ ter točno vrednost zadnjega kupona $C_2 = N(L_{\mathrm{IF}} - L(1,2))$.

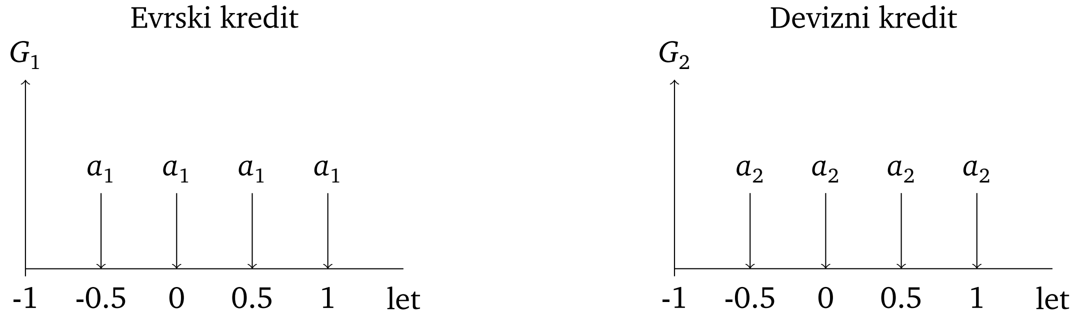
Vrednost obratne obveznice bo tedaj znašala $\left[N + N(L_{\mathrm{IF}} - L(1,2))\right] D(1,2) = \frac{N(1+L_{\mathrm{IF}}-L(1,2))}{1+L(1,2)}$.

Iz neenačbe $\frac{N(1+L_{\mathrm{IF}}-L(1,2))}{1+L(1,2)} < N$ dobimo rešitev $L(1,2) > \frac{L_{\mathrm{IF}}}{2} = 1\%$.

Opomba: V izpitnem besedilu je bilo namesto besede ”njene” zapisano ”njegove”. Vse točke ste prejeli tudi, če ste vrednost obratne obveznice primerjali z vrednostjo kupona.

2. naloga

Označimo današnji dan z 0. Amortizacijska načrta kreditov sta bila:



(a) **[4 točke]**

Označimo z $G_1 = 80\ 000$ EUR in z $G_2 = 80000 \cdot 1.5183 = 121\ 464$ CHF glavnici evrskega in deviznega kredita ter z $R_1 = 6.3\%$ in $R_2 = 6.0\%$ pripadajoči nominalni obrestni meri.

Zaradi polletnega obrestovanja obdobni diskontni faktor pri deviznem kreditu znaša $x = (1 + \frac{R_2}{2})^{-1} = 1.03^{-1}$.

Velja $G_2 = a_2 x + a_2 x^2 + a_2 x^3 + a_2 x^4 = a_2 x(1 + x + x^2 + x^3) = a_2 x \cdot \frac{1-x^4}{1-x}$, kjer je a_2 iskana anuiteta.

Dobimo $a_2 = \frac{G_2(1-x)}{x(1-x^4)} = 32\ 677.10$ CHF.

(b) **[2 točki]**

Evrska vrednost prve anuitete je bila $\frac{32\ 677.10}{1.4882} = 21\ 957.47$ EUR.

Evrska vrednost druge anuitete je $\frac{32\ 677.10}{1.3611} = 24\ 007.86$ EUR.

(c) **[6 točk]**

Podjetnik bo sklenil valutni terminski posel. Če uporabimo zvezo 1 EUR = 1.3611 CHF in jo primerjamo z $1f = S_0 d$, lahko uporabimo $S_0 = 1.3661$ in pri tem za domačo valuto vzamemo švicarski frank, za tujo pa evro. Če želimo vlogi valut zamenjati, moramo menjalni tečaj invertirati!

Za terminski tečaj K velja $K = S_0 \cdot \frac{D^f(0,T)}{D^d(0,T)}$, kjer sta $D^f(0,T) = \frac{1}{1+T \cdot L^f(0,T)}$ in $D^d(0,T) = \frac{1}{1+T \cdot L^d(0,T)}$ diskontna faktorja pri navadnem obrestovanju.

Za tretjo anuiteto dobimo $K_{0.5} = 1.3661 \cdot \frac{1+0.5 \cdot 0.002067}{1+0.5 \cdot 0.01024} = 1.35557$.

Njena evrska vrednost bo $\frac{32\ 677.10}{1.35557} = 24\ 105.80$ EUR.

Za četrto anuiteto dobimo $K_1 = 1.3661 \cdot \frac{1+0.004983}{1+0.01296} = 1.35038$.

Njena evrska vrednost bo $\frac{32\ 677.10}{1.35038} = 24\ 198.45$ EUR.

(d) **[3 točke]**

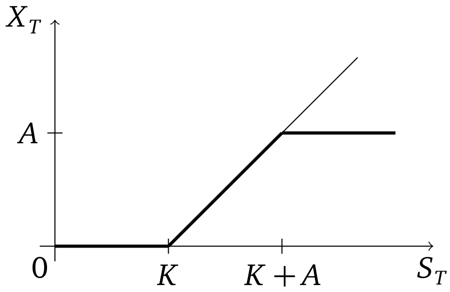
Pri evrskem kreditu bi vse anuitete znašale $a_1 = \frac{G_1(1-y)}{y(1-y^4)} = 21\,599.41$ EUR, kjer smo uporabili polletni diskontni faktor $y = (1 + \frac{R_1}{2})^{-1} = 1.0315^{-1}$.

Evrske vrednosti vseh anuitet pri deviznem kreditu so višje od anuitete, ki bi jo plačeval pri evrskem kreditu. Devizni kredit se podjetniku ni splačal.

3. naloga

(a) **[5 točk]**

Izplačila evropske nakupne opcije s kapico dobimo iz izplačil klasične evropske nakupne opcije tako, da zneske, ki presegajo vrednost A, nadomestimo z A.



Izpeljavo ločimo na 3 intervale.

- $S_T \leq K \Longrightarrow \min\{A, \max\{S_T - K, 0\}\} = \min\{A, 0\} = 0$
- $K < S_T \leq K + A \Longrightarrow \min\{A, \max\{S_T - K, 0\}\} = \min\{A, S_T - K\} = S_T - K$
- $S_T > K + A \Longrightarrow \min\{A, \max\{S_T - K, 0\}\} = \min\{A, S_T - K\} = A$

(b) **[3 točke]**

Izberemo bančni račun za numerar in iz parametrov binomskega modela $S_0 = 100$, $u = 1.1$, $d = 0.95$, $T = 3$ ter $R = 5\%$ izračunamo do prihodnosti nevtralni prehodni verjetnosti

$$q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{2}{3} \quad \text{in} \quad 1-q = \frac{1}{3},$$

ki veljata v celotnem modelu.

Končna stanja in pripadajoče verjetnosti so prikazane v tabeli:

Stanje	Cena delnice	Verjetnost Q
u^3	$S_0u^3 = 133.1$	$q^3 = \frac{8}{27}$
u^2d	$S_0u^2d = 114.95$	$3q^2(1-q) = \frac{4}{9}$
ud^2	$S_0ud^2 = 99.275$	$3q(1-q)^2 = \frac{2}{9}$
d^3	$S_0d^3 = 85.7375$	$(1-q)^3 = \frac{1}{27}$

(c) **[5 točk]**

Označimo $K = 90$ ter $A = 30$. Za vrednotenje evropske nakupne opcije s kapico so pomembne le končne vrednosti delnice:

Stanje	Cena delnice S_3	Izplačilo X_3	Verjetnost Q
u^3	133.1	$\min\{30, \max\{133.1 - 90, 0\}\} = 30$	$\frac{8}{27}$
u^2d	114.95	$\min\{30, \max\{114.95 - 90, 0\}\} = 24.95$	$\frac{4}{9}$
ud^2	99.275	$\min\{30, \max\{99.275 - 90, 0\}\} = 9.275$	$\frac{2}{9}$
d^3	85.7573	$\min\{30, \max\{85.7375 - 90, 0\}\} = 0$	$\frac{1}{27}$

Numerar je v času 3 vreden 1.05^3, v času 0 pa 1, zato na osnovi do prihodnosti nevtralne verjetnosti dobimo $c_X = \mathrm{E}_Q(\frac{X_3}{1.05^3}) = \frac{1}{1.05^3}(30 \cdot \frac{8}{27} + 24.95 \cdot \frac{4}{9} + 9.275 \cdot \frac{2}{9}) = 19.038$.

(d) **[7 točk]**

Izplačila instrumenta X znašajo $X_T = \begin{cases} 0; & S_T \leq K \\ S_T - K; & K < S_T \leq K + A \\ A; & S_T > K + A \end{cases}$

Zaradi predpostavke $S_0 d^T < K < K + A < S_0 u^T$ lahko sklepamo o razporeditvi izplačil po končnih stanjih binomskega drevesa s T obdobji in parametri u, d in R.

Upoštevamo še $q = \frac{1+R-d}{u-d}$.

S_T	X_T	Q
$S_0 u^T$	A	q^T
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$S_0 u^n d^{T-n}$	A	$\binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n}$
$S_0 u^{n-1} d^{T-n+1}$	$S_0 u^{n-1} d^{T-n+1} - K$	$\binom{T}{n-1} q^{n-1} (1-q)^{T-n+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$S_0 u^j d^{T-j}$	$S_0 u^j d^{T-j} - K$	$\binom{T}{j} q^j (1-q)^{T-j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$S_0 u^m d^{T-m}$	$S_0 u^m d^{T-m} - K$	$\binom{T}{m} q^m (1-q)^{T-m}$
$S_0 u^{m-1} d^{T-m+1}$	0	$\binom{T}{m-1} q^{m-1} (1-q)^{T-m+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$S_0 d^T$	0	$(1-q)^T$

Pri tem je m najmanjše število skokov gor, ki jih potrebujemo, da se končna cena delnice preseže vrednost K, ter n najmanjše število skokov gor, ki jih potrebujemo, da delnica preseže vrednost $K + A$.

Iščemo torej najmanjši naravni m, za katerega je $S_0 u^m d^{T-m} > K$.

Neenačbo preoblikujemo v $S_0 d^T (\frac{u}{d})^m > K$, iz katere dobimo $(\frac{u}{d})^m > \frac{K}{S_0 d^T}$.

Logaritmiranje ohranja neenakosti, zato je $m \log \frac{u}{d} > \log \frac{K}{S_0 d^T}$.

Ker je $u > d$, je $\log \frac{u}{d} > 0$. Iščemo torej najmanjši m, za katerega je $m > \dfrac{\log \frac{K}{S_0 d^T}}{\log \frac{u}{d}}$.

Definiramo $m = \left\lfloor \dfrac{\log \frac{K}{S_0 d^T}}{\log \frac{u}{d}} \right\rfloor + 1$. Podobno izpeljemo $n = \left\lfloor \dfrac{\log \frac{K+A}{S_0 d^T}}{\log \frac{u}{d}} \right\rfloor + 1$.

Zaradi zveznosti funkcije izplačil je možno m in n definirati tudi s funkcijo $\lceil \cdot \rceil$.

Z uporabo do prihodnosti nevtralne verjetnosti dobimo rezultat

$$c_X = \frac{1}{(1+R)^T} \mathrm{E}_Q(X_T) = \frac{1}{(1+R)^T} \left(\sum_{j=m}^{n-1} (S_0 u^j d^{T-j} - K) \binom{T}{j} q^j (1-q)^{T-j} + A \sum_{j=n}^{T} \binom{T}{j} q^j (1-q)^{T-j} \right).$$