Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

FINANČNA MATEMATIKA 1

Pisni izpit

17. junij 2011

Ime in priimek: _____ Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 3, rešiti morate vse. Skupaj lahko zberete 50 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, na katerem so naloge.

Izpit morate obvezno oddati.

Pazite na zadostno natančnost pri računanju. Vse odgovore utemeljite.
Na voljo imate 110 minut. Veliko uspeha!

Rezultati bodo objavljeni do torka, 21. junija 2011, v spletni učilnici predmeta.

Naloga	a	b	c	d	Skupaj
1.					
2.					
3.					
Skupaj	•	•	•	•	

1. naloga [15 točk]

Razkorak (*straddle*) z izvršilno ceno K in zapadlostjo T je opcijska strategija, sestavljena iz

- dolge pozicije v prodajni opciji z izvršilno ceno K in
- dolge pozicije v nakupni opciji z izvršilno ceno K,

kjer sta obe opciji napisani na isto delnico S in imata zapadlost T.

(a) Naj bo $K = 20$ EUR. Narišite graf izplačil razkoraka ob zapadlosti v odvisnosti od S_T.

Opomba: Privzemite, da razkoraka pred zapadlostjo niste izvršili.

Predvideno gibanje cene delnice v prihodnosti naj opisuje binomski model z dvema obdobjema in faktorjema $u = 1.15$ in $d = 0.9$. Danes je delnica vredna 18 EUR, konstantna obrestna mera za depozit na netveganem bančnem računu je 5%.

(b) Narišite drevo dogodkov in dokažite, da navedeni model trga ne dopušča arbitraže.

(c) Določite premiji ameriške nakupne in ameriške prodajne opcije, obe z zapadlostjo 2 in izvršilno ceno 20 EUR in delnico S kot osnovnim premoženjem.

(d) Določite premijo ameriškega razkoraka z izvršilno ceno 20 EUR, zapadlostjo 2 in delnico S kot osnovnim premoženjem. Pojasnite, zakaj dobljena premija ni enaka vsoti premij iz naloge (c).

2. naloga [15 točk]

Zamenjava z zamikom (*forward swap*) z navidezno glavnico N, začetkom $T > 0$ in dospetjem $U > T$ ter kuponskimi datumi $t_0 = T, t_1 = T + \Delta, \ldots, t_n = T + n\Delta = U$ je zamenjava obrestnih mer, pri kateri imetnik dolge pozicije v trenutkih t_i, $i = 1, \ldots, n$, plačuje zneske, vezane na N in konstantno obrestno mero L_{SWAP}, imetnik kratke pozicije pa v trenutku t_i, $i = 1, \ldots, n$, plača znesek $N\Delta L(t_{i-1}, t_i)$. V trenutku t_0 izplačil ni, zamenjavo pa sklenemo v trenutku 0.

(a) Dokažite, da lahko dolgo pozicijo v zamenjavi z zamikom v času 0 predstavimo

- kot portfelj klasičnih zamenjav obrestnih mer (to je brez zamika) ali
- kot portfelj dogovorov o terminski obrestni meri

Natančno specificirajte vse navedene instrumente in pozicije.

(b) Naj ima navadna obrestna mera v času 0 naslednjo časovno strukturo

T	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$L(0,T)$	2.50%	2.75%	3.20%	3.70%	4.00%	4.35%

in naj bo $N = 100\ 000$ EUR, $T = 1$, $U = 3$ in $\Delta = \frac{1}{2}$. Določite vrednost zamenjave z zamikov z obrestno mero $L_{\text{SWAP}} = 5\%$ ob sklenitvi za imetnika dolge pozicije.

(c) Pri podatkih N, T, U in Δ iz naloge (b) določite obrestno mero L_{SWAP}, pri kateri bo vrednost zamenjave z zamikom ob sklenitvi enaka 0.

(d) Pri splošnih podatkih N, T, U in Δ izpeljite formulo za L_{SWAP}, pri kateri bo vrednost zamenjave z zamikom ob sklenitvi enaka 0. Preverite, da pri $T = 0$ dobite znano formulo iz klasičnih zamenjav obrestnih mer.

3. naloga [20 točk]

Na tvegan vrednostni papir S s ceno S_t, ki ne izplačuje dividend, so izdane evropske nakupne opcije, vse z zapadlostjo T in različnimi izvršilnimi cenami K_i. V trenutku $t < T$ premijo opcije z izvršilno ceno $K_i > 0$ označimo s c_i.

(a) Dokažite, da je na popolnem trgu brez arbitraže premija nakupne opcije *padajoča* funkcija izvršilne cene. To pomeni, da pri poljubnih K_1 in K_2 iz $K_1 \leq K_2$ sledi $c_1 \geq c_2$.

(b) Dokažite, da je premija nakupne opcije *konveksna* funkcija izvršilne cene. Naj bo $K_1 < K_3$. Konveksnost pomeni, da za vsak $\lambda \in [0,1]$ iz $K_2 = \lambda K_1 + (1-\lambda)K_3$ sledi $c_2 \leq \lambda c_1 + (1-\lambda)c_3$.

Na isti vrednostni papir napišemo še evropske prodajne opcije z zapadlostjo T. Naj bo p_i premija evropske prodajne opcije z izvršilno ceno K_i.

(c) Zapišite paritetne enačbe, ki povezujejo premije c_i in p_i za $i = 1, 2, 3$.

(d) Dokažite, da je premija prodajne opcije *konveksna* funkcija izvršilne cene.