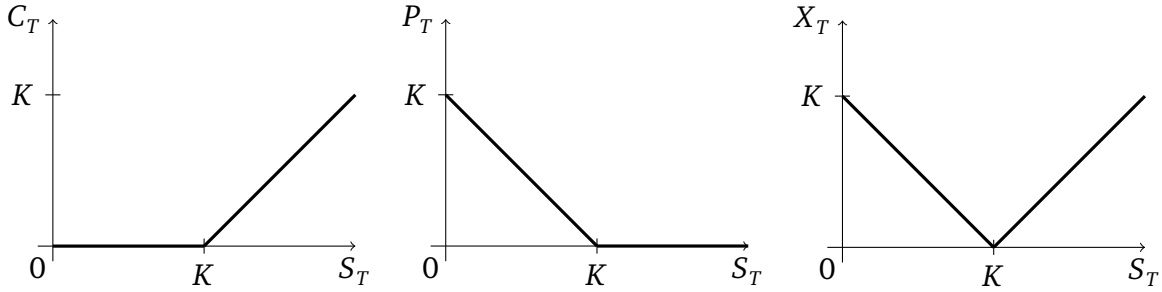
Pisni izpit: 17. junij 2011

1. naloga

(a) **[3 točke]**

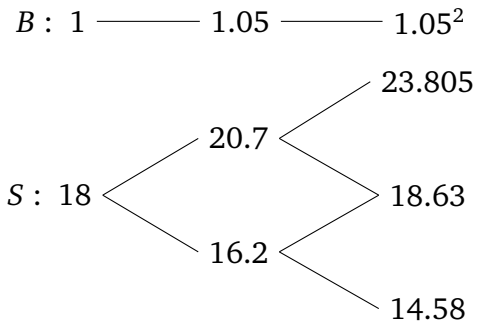
Narišemo izplačila nakupne in prodajne opcije ter ju seštejemo v izplačilo razkoraka X.



Opazimo, da so izplačila razkoraka X enaka $X_T = |S_T - K| = |S_T - 20|$.

(b) **[2 točki]**

Pri podatkih $S_0 = 18$ EUR, $R = 5\%$, $u = 1.15$, $d = 0.9$ in $T = 2$ narišemo binomsko drevo.



Ker velja $d < 1 + R < u$, to je $0.9 < 1.05 < 1.15$, je trg brez arbitraže.

(c) **[6 točk]**

Najprej izračunamo do prihodnosti nevtralno prehodno verjetnost $q = \frac{1+R-d}{u-d} = \frac{3}{5}$.

Ker delnica ne izplačuje dividend, je ameriška nakupna opcija ekvivalentna evropski nakupni opciji.

Zapišemo njena izplačila ob zapadlosti in pripadajoče do prihodnosti nevtralne verjetnosti.

Stanje	Cena delnice S_2	Izplačilo	Verjetnost Q
u^2	23.805	3.805	$(\frac{3}{5})^2$
ud	18.63	0	$2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$
d^2	14.58	0	$(\frac{2}{5})^2$

Premijo opcije določimo z diskontiranjem pričakovanih izplačil

$c_0^A = \frac{3.805}{1.05^2} \cdot (\frac{3}{5})^2 = 1.2425$ EUR.

Ameriška prodajna opcija nam ob izvršitvi v trenutku t ponuja izplačilo $Z_t = \max\{K - S_t, 0\}$.

Premijo določimo z obratno indukcijo.

$t = 2$: (uu) izvršitev: $\max\{20 - 23.805, 0\} = \underline{0}$

(ud) izvršitev: $\max\{20 - 18.63, 0\} = \underline{1.37} \Rightarrow$ izvršimo

(dd) izvršitev: $\max\{20 - 14.58, 0\} = \underline{5.42} \Rightarrow$ izvršimo

$t = 1$: (u) izvršitev: $\max\{20 - 20.7, 0\} = 0$

čakanje: $\frac{1}{1.05}(0 \cdot \frac{3}{5} + 1.37 \cdot \frac{2}{5}) = \underline{0.5219} \Rightarrow$ čakamo

(d) izvršitev: $\max\{20 - 16.2, 0\} = \underline{3.8}$

čakanje: $\frac{1}{1.05}(1.37 \cdot \frac{3}{5} + 5.42 \cdot \frac{2}{5}) = 2.8476 \Rightarrow$ izvršimo

$t = 0$: (Ω) izvršitev: $\max\{20 - 18, 0\} = \underline{2}$

čakanje: $\frac{1}{1.05}(0.5219 \cdot \frac{3}{5} + 3.8 \cdot \frac{2}{5}) = 1.7459 \Rightarrow$ izvršimo

Opcijo takoj izvršimo. Njena premija je $p_0^A = 2$.

(d) **[4 točke]**

Ameriški razkorak vrednotimo z obratno indukcijo. Ob izvršitvi v trenutku t nam ponuja izplačilo $Z_t = |S_t - K|$.

$t = 2$: (uu) izvršitev: $|23.805 - 20| = \underline{3.805} \Rightarrow$ izvršimo

(ud) izvršitev: $|18.63 - 20| = \underline{1.37} \Rightarrow$ izvršimo

(dd) izvršitev: $|14.58 - 20| = \underline{5.42} \Rightarrow$ izvršimo

$t = 1$: (u) izvršitev: $|20.7 - 20| = 0.7$

čakanje: $\frac{1}{1.05}(3.805 \cdot \frac{3}{5} + 1.37 \cdot \frac{2}{5}) = \underline{2.6962} \Rightarrow$ čakamo

(d) izvršitev: $|16.2 - 20| = \underline{3.8}$

čakanje: $\frac{1}{1.05}(1.37 \cdot \frac{3}{5} + 5.42 \cdot \frac{2}{5}) = 2.8476 \Rightarrow$ izvršimo

$t = 0$: (Ω) izvršitev: $|18 - 20| = 2$

čakanje: $\frac{1}{1.05}(2.6962 \cdot \frac{3}{5} + 3.8 \cdot \frac{2}{5}) = \underline{2.9833} \Rightarrow$ čakamo

Premija ameriškega razkoraka mora biti 2.9833 EUR, kar je manj kot je vsota opcijskih premij iz naloge (c), ki znaša $1.2425 + 2 = 3.2425$ EUR.

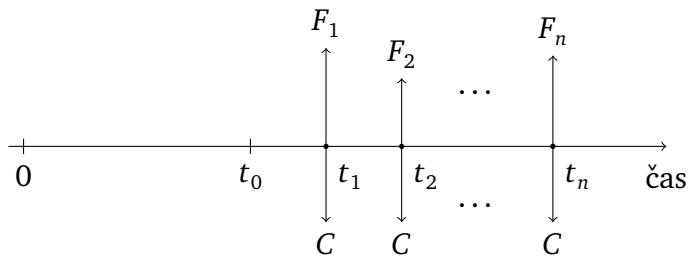
Razkorak sestavljata dve opciji, od katerih se vselej splača izvršiti le eno. Ob izvršitvi razkoraka uničimo obe opciji hkrati, torej tudi tisto, ki se je ne splača. Če opciji nista vezani, eno opcijo ohranimo in s tem pridobimo možnost za dodatni zaslužek v prihodnosti.

2. naloga

(a) **[4 točke]**

Narišimo shemo denarnih tokov za dolgo pozicijo.

Privzemimo, da je T večkratnik časovnega obdobja Δ.



Zamenjava z zamikom kot portfelj 2 klasičnih zamenjav:

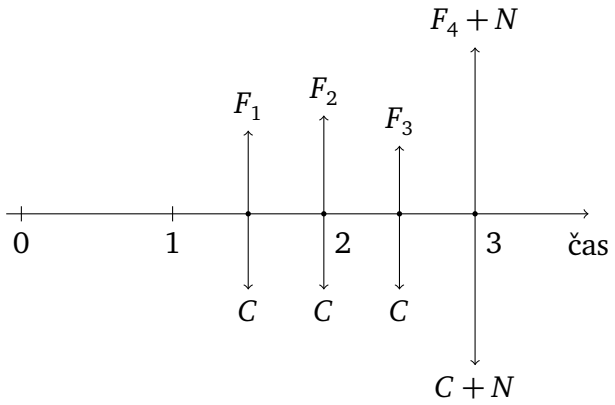
- dolga pozicija v klasični zamenjavi z dospetjem U, navidezno glavnico N, medkuponskim intervalom Δ in obrestno mero L_{SWAP},
- kratka pozicija v klasični zamenjavi z dospetjem T, navidezno glavnico N, medkuponskim intervalom Δ in obrestno mero L_{SWAP}.

Zamenjava z zamikom kot portfelj dolgih pozicij v n dogovorih o terminski obrestni meri:

- generični FRA ima datum poravnave t_{i-1}, dospetje t_i, navidezno glavnico N in obrestno mero $L_{\text{FRA}} = L_{\text{SWAP}}$.
- Pri tem privzamemo, da se vrednost FRA izplača ob dospetju in ne na dan poravnave.

(b) **[4 točke]**

Dodamo izmenjavo navideznih glavnic ob dospetju in posebej vrednotimo fiksne in spremenljnive denarne tokove.



Fiksni kuponi znašjo $C = N\Delta L_{\text{SWAP}} = 100000 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.05 = 2500$ EUR.

Sedanjo vrednost fiksnih denarnih tokov določimo z diskontiranjem.

$$V_0^{\text{CB}} = C\Big(D(0,\tfrac{3}{2}) + D(0,2) + D(0,\tfrac{5}{2}) + D(0,3)\Big) + ND(0,3) =$$

$$= 2500\Big(\tfrac{1}{1+\frac{3}{2}\cdot 0.032} + \tfrac{1}{1+2\cdot 0.037} + \tfrac{1}{1+\frac{5}{2}\cdot 0.04} + \tfrac{1}{1+3\cdot 0.0435}\Big) + 100000 \cdot \tfrac{1}{1+3\cdot 0.0435} = 97653.82 \text{ EUR}.$$

Spremenljive denarne tokove repliciramo z investicijo zneska $ND(0,1)$ do trenutka 1.

Dobljeni znesek N v trenutku 1 investiramo do časa $\frac{3}{2}$, nato izplačamo obresti in reinvestiramo nominalno vrednost do časa 2. Postopek ponavimo še v trenutkih 2 in $\frac{5}{2}$, v času 3 pa izplačamo obresti in nominalno vrednost.

$V_0^{\mathrm{FL}} = ND(0,1) = \frac{100000}{1+1\cdot 0.0275} = 97323.60$ EUR.

Vrednost zamenjave z zamikom znaša $V_0^{\mathrm{SWAP}} = V_0^{\mathrm{FL}} - V_0^{\mathrm{CB}} = -330.22$ EUR.

(c) **[4 točke]**

Veljati mora $V_0^{\mathrm{FL}} = V_0^{\mathrm{CB}}$, kar pomeni

$$N\Delta L_{\mathrm{SWAP}}\Big(D(0,\tfrac{3}{2}) + D(0,2) + D(0,\tfrac{5}{2}) + D(0,3)\Big) + ND(0,3) = ND(0,1).$$

Krajšamo N in izrazimo $L_{\mathrm{SWAP}} = \dfrac{D(0,1) - D(0,3)}{\Delta\Big(D(0,\frac{3}{2}) + D(0,2) + D(0,\frac{5}{2}) + D(0,3)\Big)} = 4.82\%$.

(d) **[3 točke]**

Sklepamo podobno kot v (c) in dobimo

$$L_{\mathrm{SWAP}} = \frac{D(0,T) - D(0,U)}{\Delta\Big(D(0,T) + D(0,T+\Delta) + \cdots + D(0,U)\Big)} = \frac{D(0,t_0) - D(0,t_n)}{\Delta\sum_{i=1}^{n} D(0,t_i)}.$$

Pri $T = t_0 = 0$ dobimo $D(0,0) = 1$ in formulo iz klasičnih zamenjav.

3. naloga

(a) **[6 točk]**

Naj bo $K_1 \leq K_2$ in privzemimo, da je $c_1 < c_2$, torej $c_2 - c_1 > 0$.

Pripravimo strategijo U.

- čas t: prodamo (izdamo) nakupno opcijo z izvršilno ceno K_2, kupimo nakupno opcijo z izvršilno ceno K_1.

  Začetno izplačilo strategije znaša $U_t = c_2 - c_1 > 0$.

- čas T: izplačamo nakupno opcijo z izvršilno ceno K_2, če je potrebno, izvršimo nakupno opcijo z izvršilno ceno K_1, če se splača.

  Končno izplačilo strategije znaša $U_T = -\max\{S_T - K_2, 0\} + \max\{S_T - K_1, 0\}$.

Izraz obravnavamo na disjunktnih intervalih.

(1) $S_T < K_1 \leq K_2$

Izplačilo se poenostavi v $U_T = -0 + 0 = 0$.

(2) $K_1 \leq S_T \leq K_2$

Izplačilo je $U_T = -0 + S_T - K_1 > 0$.

(3) $K_1 \leq K_2 < S_T$

Dobimo $U_T = -S_T + K_2 + S_T - K_1 = K_2 - K_1 \geq 0$

U je arbitražna strategija.

(b) **[7 točk]**

Naj bo $K_1 < K_3$ in $K_2 = \lambda K_1 + (1-\lambda)K_3$.

Privzemomo, da je $c_2 > \lambda c_1 + (1-\lambda)c_3$.

Po preoblikovanju dobimo $c_2 - \lambda c_1 - (1-\lambda)c_3 > 0$ in skonstruiramo strategijo V.

- čas t: prodamo (izdamo) nakupno opcijo z izvršilno ceno K_2,
  kupimo λ nakupne opcije z izvršilno ceno K_1,
  kupimo $(1-\lambda)$ nakupne opcije z izvršilno ceno K_3.

  Začetno izplačilo strategije znaša $V_t = c_2 - \lambda c_1 - (1-\lambda)c_3 > 0$.

- čas T: izplačamo nakupno opcijo z izvršilno ceno K_2, če je potrebno,
  izvršimo λ nakupne opcije z izvršilno ceno K_1, če se splača,
  izvršimo λ nakupne opcije z izvršilno ceno K_3, če se splača.

  Končno izplačilo strategije znaša

  $$V_T = -\max\{S_T - K_2, 0\} + \lambda \max\{S_T - K_1, 0\} + (1-\lambda)\max\{S_T - K_3, 0\}.$$

Dobljeni izraz poenostavimo z obravnavo na intervalih. Kritične točke so K_1, K_2 in K_3.

(1) $S_T \le K_1 < K_2 < K_3$

Izplačilo se poenostavi v $V_T = -0 + \lambda \cdot 0 + (1-\lambda)\cdot 0 = 0$.

(2) $K_1 < S_T < K_2 < K_3$

Izplačilo je $V_T = \lambda(S_T - K_1) > 0$.

(3) $K_1 < K_2 \le S_T < K_3$

Dobimo $V_T = -S_T + K_2 + \lambda S_T - \lambda K_1 = (1-\lambda)(K_3 - S_T) \ge 0$.
Do rezultata smo prišli tako, da smo K_2 nadomestili z $\lambda K_1 + (1-\lambda)K_3$.

(4) $K_1 < K_2 < K_3 \le S_T$

Izplačilo je enako $V_T = -S_T + K_2 + \lambda S_T - \lambda K_1 + (1-\lambda)S_T - (1-\lambda)K_3 = 0$.

V je arbitražna strategija.

(c) **[3 točke]**

Zapišemo paritetne relacije za obravnavane evropske nakupne in prodajne opcije. $D(t,T)$ je diskontni faktor za obdobje $[t,T]$.

$p_1 + S_t = c_1 + K_1 D(t,T)$

$p_2 + S_t = c_2 + K_2 D(t,T)$

$p_3 + S_t = c_3 + K_3 D(t,T)$

(d) **[4 točke]**

Iz paritet iz (c) izrazimo premije nakupnih opcij

$c_1 = p_1 + S_t - K_1 D(t,T)$,

$c_2 = p_2 + S_t - K_2 D(t,T)$,

$c_3 = p_3 + S_t - K_3 D(t,T)$,

in jih vstavimo v že dokazano neenakost iz naloge (b). Dobimo

$p_2 + S_t - K_2 D(t,T) \leq \lambda(p_1 + S_t - K_1 D(t,T)) + (1-\lambda)(p_3 + S_t - K_3 D(t,T))$.
Neenakost se po krajšanju poenostavi v
$p_2 \leq \lambda p_1 + (1-\lambda) p_3$,
kar pomeni konveksnost premije prodajne opcije kot funkcije izvršilne cene.